

Institut für Festkörperforschung (IFF)

***Numerische Untersuchungen  
zur Anwendbarkeit der Magnetotomographie  
auf Brennstoffzellenstacks***

*Fatma Güлак*





***Numerische Untersuchungen  
zur Anwendbarkeit der Magnetotomographie  
auf Brennstoffzellenstacks***

*Fatma Güлак*

Berichte des Forschungszentrums Jülich; 4310  
ISSN 0944-2952  
Institut für Festkörperforschung (IFF)  
Jül-4310

Vollständig frei verfügbar im Internet auf dem Jülicher Open Access Server (JUWEL)  
unter <http://www.fz-juelich.de/zb/juwel>

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek, Verlag  
D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland  
☎ 02461 61-5220 · Telefax: 02461 61-6103 · e-mail: [zb-publikation@fz-juelich.de](mailto:zb-publikation@fz-juelich.de)

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung und Erweiterung meiner Diplomarbeit, die für einen Diplomabschluss an der FH-Aachen, Standort Jülich, im IFF des Forschungszentrums Jülich angefertigt wurde.



## **Zusammenfassung**

Die durch unterschiedliche komplexe chemische und physikalische Vorgänge verursachten Inhomogenitäten der Ströme in einem Brennstoffzellenstack können dessen Leistungsfähigkeit erheblich vermindern. Die konventionelle Magnetotomographie ist eine nicht-invasive Methode, im Prinzip diese Inhomogenitäten erfassen zu können. Dazu werden an vielen Punkten um den Stack Magnetfeldmessungen durchgeführt, um daraus die inneren Stromdichteverteilungen zu rekonstruieren. In der gegenwärtigen Arbeit werden für diese Methode die Genauigkeitsanforderungen angegeben, die Magnetfeldmessgeräte erfüllen müssten, um aussagekräftige Rekonstruktionen zu ermöglichen. Es stellt sich heraus, dass beim Brennstoffzellen-Stack diese Genauigkeitsanforderungen jenseits der technischen Möglichkeiten sind. D.h., auch mit Geräten, die Magnetfelder sehr genau messen können, ist nur ungenügende Information über die Verteilung der elektrischen Ströme im Brennstoffzellen-Stack erhältlich.

## **Abstract**

Inhomogeneities of currents in a fuel cell stack caused by various complex chemical and physical processes may result in a serious reduction of performance. Conventional magnetotomography is a noninvasive method for detecting these inhomogeneities - at least in principle. To this purpose many measurements of the magnetic fields around the stack are taken in order to reconstruct from that information the internal currents. In this work precision requirements of the measuring devices are presented which are necessary to obtain reasonable reconstructions. It turns out that these requirements are beyond technical limits. This means that conventional magnetotomography cannot provide satisfactory information about electric current distributions in a fuel cell stack even if the devices can measure magnetic fields with very high precision.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung . . . . .	1
1.1.1	Methanol-Brennstoffzelle - DMFC . . . . .	3
1.1.2	Methanol-Brennstoffzellenstack . . . . .	5
1.2	Problembeschreibung . . . . .	6
1.3	Bisherige Ergebnisse . . . . .	7
1.4	Lösungsansatz und Zielsetzung . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>12</b>
2.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	12
2.1.1	Grundkenntnisse der Vektoranalysis . . . . .	12
2.1.2	Die Singulärwertzerlegung . . . . .	13
2.1.3	Die Pseudoinverse . . . . .	15
2.2	Physikalische Grundlagen . . . . .	16
2.2.1	Maxwellsche Gleichungen . . . . .	16
2.2.2	Das Biot-Savart Gesetz . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Abhängigkeit der Messgrößen und Messpunktreduktion</b>	<b>19</b>
3.1	Die Stromdichteverteilung . . . . .	19
3.2	Das inverse Problem . . . . .	20
3.3	Singulärwerte und Reichweite der gegenseitigen Beeinflussung von Magnetfeldern im Brennstoffzellenstack . . . . .	22
3.4	Bedeutung der Singulärwerte für die Genauigkeitsanforderungen an die Messgeräte . . . . .	24
3.4.1	Genauigkeitsanforderungen bei systematischen Fehlern . . . . .	25
3.4.2	Genauigkeitsanforderungen bei zufälligen Fehlern . . . . .	26
3.5	Die Messpunktreduktion . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Implementierung</b>	<b>31</b>
4.1	Modellierung . . . . .	31
4.2	Programmaufbau . . . . .	33

4.2.1	Bestimmung der Stromdichteverteilung $j$	33
4.2.2	Bestimmung der Ableitung $\frac{dj}{d\sigma}$	34
4.2.3	Anwendung des Biot-Savart Gesetzes	37
4.2.4	Entwicklungskoeffizienten von Strömen durch die MEA	40
4.2.5	Reduktion der Messpunkte mit der $\zeta$ -Funktion	41
<b>5</b>	<b>Resultate</b>	<b>42</b>
5.1	Festlegung der Modellierung	42
5.2	DMFC-Stack ohne Aluminiumplatten	44
5.2.1	Messabstand von $1cm$	45
5.2.2	Messabstand von $3cm$	49
5.3	DMFC-Stack mit Aluminiumplatten	50
5.3.1	Messabstand von $1cm$	50
5.3.2	Messabstand von $3cm$	51
5.4	Vergleich beider Modelle	53
5.5	Simulation eines speziellen Defektes	56
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>58</b>
6.1	Schlussfolgerung	59
6.2	Ausblick	60

# Kapitel 1

## Überblick

### 1.1 Einleitung

Zur Minimierung des  $CO_2$  Ausstoßes ist die Relevanz regenerativer Energiequellen im Gegensatz zu fossilen Brennstoffen in unserem Zeitalter der Klimaerwärmung nicht abstreitbar. Da jedoch Wind- und Wasserkraft als regenerative Energiequellen für den mobilen Verbrauch nicht geeignet sind, wird zurzeit besonders die Effizienz von unterschiedlichen Brennstoffzellen bzw. Brennstoffzellenstacks (*stack* = *Stapel*) untersucht. Was aber genau macht Brennstoffzellen so besonders? Herkömmliche Energiewandler produzieren Strom und Wärme in der Regel über Verbrennungsprozesse und Umwege über thermische und mechanische Energie, die mit Energieverlusten und Umweltbelastungen verbunden sind, wodurch ein akzeptabler Carnot-Wirkungsgrad<sup>1</sup> bei weitem nicht erreicht wird. Brennstoffzellen hingegen erzeugen elektrische Energie lautlos und umweltschonend auf direktem Wege über eine chemische Reaktion. Es wird also chemische Energie direkt in elektrische Energie umgewandelt, wodurch der theoretisch erreichbare Wirkungsgrad wesentlich erhöht wird. Trotzdem ist man aber in der Praxis von der maximalen Effizienz noch weit entfernt. Werfen wir einen genaueren Blick auf Funktionsweise einer Brennstoffzelle und die Klassifizierung unterschiedlicher Brennstoffzellentypen:

Eine Brennstoffzelle ist ein galvanisches Element, also genauer eine Vorrichtung zur Umwandlung von chemischer Energie in elektrische Energie (ähnlich wie eine Batterie), bestehend aus zwei verschiedenen Elektroden, der Anode und Kathode, getrennt durch einen Elektrolyten (Ionenleiter). Die Halbzellen sind zusätzlich mit einem Elektronenleiter verbunden, sodass der Stromkreis geschlossen ist. Prinzipiell beruht die Erzeugung der elektrischen Energie auf einer Redoxreaktion, wobei Reduktion und Oxidation räumlich getrennt in jeder Halbzelle ablaufen. Durch das kontinuierliche Zufügen von Brenngas (wie z.B. Wasserstoff) auf der Anodenseite erfolgt dort eine katalytische Oxidation, sodass die

---

<sup>1</sup> **Der Carnot-Wirkungsgrad**, ist der höchste, theoretisch mögliche Wirkungsgrad bei der Umwandlung von Wärmeenergie in elektrische oder mechanische Energie.

freigesetzten Elektronen über einen Leiter zur Kathode geleitet werden. Die entstandenen Ionen durchdringen gleichzeitig den Elektrolyten hin zur Kathodenseite, sodass dort mit dem ebenfalls permanent zugeführten Oxidationsmittel (Luft oder reinem Sauerstoff) Wasser entsteht. Der auf diese Weise produzierte Strom fließt durch einen elektrischen Leiter über den Verbraucher wieder zur Anodenseite der Br Anforderungenennstoffzelle. Brennstoffzellen werden im Allgemeinen durch die Leistung, eingesetzten Materialien und Betriebstemperatur unterschieden, während prinzipieller Aufbau und Funktionsweise erhalten bleiben. Bezogen auf das Kriterium der Betriebstemperatur differenziert man zwischen Hochtemperaturbrennstoffzellen, deren Betriebstemperatur zwischen  $600^{\circ}\text{C}$  und  $1000^{\circ}\text{C}$  liegen, und Niedertemperaturbrennstoffzellen, die unter Temperaturen von weniger als  $200^{\circ}\text{C}$  betrieben werden.

Die SOFC (*Solid Oxide Fuel Cell*) sowie die MCFC (*Molten Carbonat Fuel Cell*) sind beispielsweise Hochtemperaturbrennstoffzellen, die mit einem Wirkungsgrad von etwa 47% Leistungen im Megawatt-Bereich erbringen. Diese Klasse von Brennstoffzellen werden zum Beispiel in Kraftwerken genutzt, sind aber aufgrund der hohen Betriebstemperaturen für den mobilen Gebrauch, wie etwa in Fahrzeugen, nur in Spezialfällen geeignet. Folglich bieten sich hier die Niedertemperaturbrennstoffzellen an, an deren Weiterentwicklung man besonders interessiert ist. Die PAFC (*Phosphoric Acid Fuel Cell*), die AFC (*Alkaline Fuel Cell*) oder auch die PEMFC (*Proton Exchange Membrane Fuel Cell*) stellen Beispiele für diese Klasse von Brennstoffzellen dar. Die PEMFC, deren Brenngas aus Wasserstoff besteht, erreicht in Stackform Leistungen von bis zu  $300\text{kW}$  und wird beispielsweise schon für den Antrieb von U-Booten eingesetzt. Jedoch stellt die Notwendigkeit der Lagerung von Wasserstoff als Treibstoff bei der Produktion von wasserstoffbetriebenen Fahrzeugen (im Gegensatz zu U-Booten) ein großes Problem dar, da die Speicherung von möglichst viel Wasserstoff auf möglichst kleinem Raum hohe Drücke von 200 bis 300 bar erfordert und der Raumbedarf trotzdem zu hoch ist. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, wäre die indirekte Lagerung von Wasserstoff, mittels Kohlenwasserstoffen wie Methanol oder Ethanol, aus denen wiederum über einen Reformier der benötigte Wasserstoff gewonnen wird. Nachteilig dabei ist jedoch der zusätzliche Raumbedarf für den Reformier, und der schlechtere Wirkungsgrad von etwa 35%. Einer bessere Lösung wäre daher der Einsatz einer Brennstoffzelle, die Methanol direkt als Brennstoff verwendet, um den Reformier zu vermeiden: die **DMFC** (*Direct Methanol Fuel Cell*). Diese wandelt direkt ohne den Umweg über einen Reformier die chemische Energie des Methanols in elektrische Energie um.

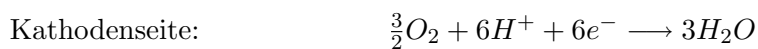
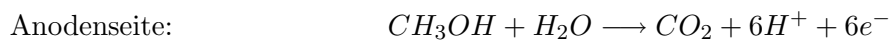
Der Wegfall eines Reformiers bringt ein geringeres Gesamtgewicht, ein geringeres Systemvolumen, eine einfachere Betriebsweise mit schnellerem Ansprechverhalten, bessere Dynamik und geringere Investitions- und Betriebskosten mit sich, wodurch man an einer Weiterentwicklung besonders interessiert ist. Da in der vorliegenden Arbeit die Parameter der DMFC für Simulationsberechnungen eingesetzt wurden, werfen wir nun einen

### 1.1.1 Methanol-Brennstoffzelle - DMFC

Technical drawings of the fuel cell components. The left drawing is a side view showing the assembly of the fuel cell stack. It includes layers of Edelstahl (U-Boot-Stahl), Titan, MEA Schicht, and Grafschicht (segmentiert and nicht segmentiert). Dimensions are given in mm: 14 mm, 2 mm, 0.6 mm, 4.2 mm, 4.2 mm, 14 mm, 280 mm, 240 mm, 178 mm, 240 mm, 240 mm. The right drawing is a top view of the MEA Schicht, showing its dimensions: 178 mm x 138 mm. It is surrounded by a 160 mm x 200 mm frame, which is further enclosed by a 240 mm x 280 mm frame. A contact screw with a 10 mm diameter is shown at the bottom right, with a 20 mm diameter base.

Der Aufbau eines Stapels von Brennstoffzellen (Brennstoffzellenstacks) wird im folgenden Kapitel beschrieben. Im Detail sieht der Prozess der chemischen Reaktionen in einer DMFC folgendermaßen aus:

Auf der Anodenseite wird ein Gemisch aus Methanol und Wasser zugeführt. An der Katalysatorschicht wird der im Methanol ( $CH_3OH$ ) bzw. im Wasser ( $H_2O$ ) gebundene Wasserstoff abgetrennt und in Protonen und Elektronen aufgeteilt. Somit wandern die freigesetzten Protonen durch die MEA hindurch, während die Elektronen auf der Anodenseite bleiben. Folglich kommt es zu einem Elektronenmangel (+) auf der Kathodenseite und einem Elektronenüberschuss (-) an der Anodenseite. Das Prinzip des Ladungsausgleichs führt dazu, dass die Elektronen über einen äußeren Stromkreis zur Kathode wandern und infolgedessen einen elektrischen Strom erzeugen, der von einem Endverbraucher verwendet werden kann. Die verbleibenden Sauerstoff-Atome des Wassers auf der Anodenseite reagieren mit den Sauerstoff- und Kohlenstoff-Atomen des Methanols zu Kohlendioxid ( $CO_2$ ), welches die Oxidation darstellt. Die dadurch entstandenen Protonen durchdringen die MEA, wandern zur Kathodenseite und werden dort mit dem zugeführten Sauerstoff sowie den dort hingeleiteten Elektronen zu Wasser reduziert. Zusammengefasst sehen die chemischen Reaktionen innerhalb einer DMFC folgendermaßen aus:



Im Idealfall liegt die theoretische Leerlaufspannung einer DMFC bei  $U_0 = 1.2V$  und der theoretische Wirkungsgrad bei  $\eta \approx 0.95$ . Dies würde aber voraussetzen, dass in der Brennstoffzelle ausschließlich die oben aufgeführten Reaktionen stattfinden. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall, da die Polymermembran teilweise Methanol und Sauerstoff durchlässt und dies auf beiden Seiten der Membran zu direkten Reaktionen führt. Da im Falle einer direkten Reaktion aber keine Elektronen freigesetzt werden, kommt es zu einer Verminderung des Wirkungsgrades, sodass man nur noch eine Leerlaufspannung von  $U_L = 0.7V$  erhält. Bei einem Betrieb mit einem Lastwiderstand sinkt die Spannung sogar bis zu  $0.4V$  ab, was bei einer typischen Stromstärke von  $60A$  einer Leistung von  $24W$  entspricht.

Aus Gründen der Stromerhaltung muss bei einem externen Elektronen-Stromfluß vom Minus- zum Pluspol, der Elektronenfluß innerhalb der Brennstoffzelle von + nach - stattfinden. Dieser Strom wird durch die komplexen chemischen Vorgänge innerhalb der Zelle verursacht, und kann mit Hilfe des Ersatzschaltbildes [5] erläutert werden. Sei  $U_A = -0.3V$  der Spannungsabfall, so gilt  $U = U_L + U_A$ . Mit der Annahme, dass nun im Zellinneren eine Spannung von  $U_A = -0.3V$  anstelle von  $U_L$  herrscht, fließt der Strom richtigerweise vom Plus- zum Minuspol.

### 1.1.2 Methanol-Brennstoffzellenstack

Wie im letzten Abschnitt beschrieben, erbringt also eine einzelne DMFC im Idealfall eine Spannung von etwa  $1.2V$ , in der Realität sogar einen noch kleineren Betrag von weniger als  $0.7V$ . Für den praktischen Gebrauch ist jedoch eine viel höhere Spannung erforderlich. Die Lösung dafür ist, das Hintereinanderschalten von mehreren Brennstoffzellen zu einem Brennstoffzellenstack, sodass sich die einzelnen Spannungen summieren und die entstandene Spannung beispielsweise einen Automobil-Elektromotor betreiben kann. In diesem Fall sind also eine Reihe von Brennstoffzellen miteinander verbunden, wobei sich die einzelnen Brennstoffzellen innerhalb eines Stacks von der einzelnen Experimentierbrennstoffzelle im Aufbau unterscheiden. In einem Brennstoffzellenstack bestehen die einzelnen Zellen typischerweise nur noch aus der  $1mm$  dicken MEA, welche von beiden Seiten mit  $1mm$  dicken Grafitplatten eingefasst sind. Die Titanschicht fällt weg. Die auf horizontaler Weise in Reihe geschalteten Brennstoffzellen sind wiederum von zwei  $5mm$  dicken Stahlplatten eingeschlossen, und bewirken eine Stabilisierung des Brennstoffzellenstacks. Einen anderen Vorteil verursacht die hohe Leitfähigkeit des Stahls, wodurch im Falle einer punktuellen Stromeinleitung eine schnelle Homogenisierung des Stromverlaufes eintritt. Dabei wird der geschlossene Stromkreis durch die Verbindung der beiden äußeren Stahlplatten anhand eines Leiters erreicht. Man beachte dass diese Maße hier nur grobe Angaben sind, sodass auch Abweichungen möglich sind. Aufgrund des oben beschriebenen Aufbaus eines Brennstoffzellenstacks, wird bei Antrieb ein nun horizontaler Fluss der Brennstoffe (Methanol und Wasser) und des „Abwassers“ realisiert.

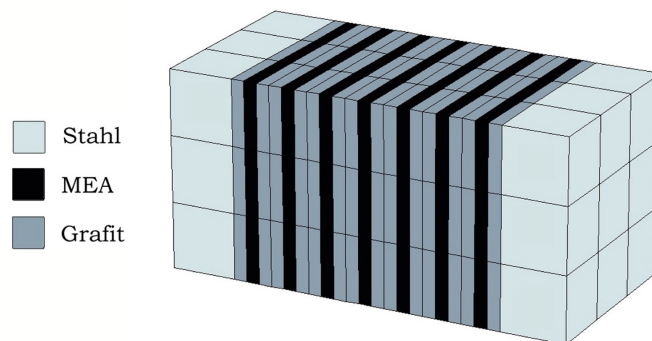


Abbildung 1.2: Beispielstack mit fünf aneinandergeschalteten Brennstoffzellen

In der vorliegenden Arbeit wurde ein spezieller Experimentierbrennstoffzellenstack verwendet, der aus 51 DMFC Brennstoffzellen besteht, wobei jede MEA von zwei Grafitplatten eingeschlossen ist. Die 51 Brennstoffzellen sind von zwei  $5mm$  dicken Stahlplatten umfasst. Die einzelnen Schichtdicken innerhalb des Stacks betragen jeweils  $1mm$  und alle Schichten haben zur Vereinfachung die gleiche Querschnittsfläche von  $150mm \times 150mm$ . Die gesamte Länge beträgt somit  $163mm$ .



## 1.2 Problembeschreibung

Bei einer DMFC sind gewisse Probleme, die den Wirkungsgrad erheblich verringern, wie beispielsweise die direkte Permeation von Methanol durch die Membran, noch nicht gelöst. Folglich wird nach Lösungswegen gesucht, die diesen Wirkungsgrad erhöhen lassen. Neben der verstärkten Suche nach neuen Elektrolyten mit geringerer Permeabilität für die MEA, ist für die Verbesserung der Effizienz einer Brennstoffzelle die Information über Stromdichteverteilung innerhalb der Brennstoffzelle (bzw. des Brennstoffzellenstacks), besonders innerhalb der MEA unentbehrlich. Für einen optimalen Wirkungsgrad müssen die Ströme innerhalb der MEA möglichst homogen<sup>2</sup> sein. Allerdings sind diese Ströme von unterschiedlichen komplexen chemischen und physikalischen Vorgängen, und Faktoren wie der Temperatur innerhalb der Zelle, der relativen Feuchtigkeit der Reaktanden, dem Partialdruck<sup>3</sup> der eingespeisten Gase, der Struktur der Gaskanäle sowie von den speziellen Beschaffenheiten der MEA abhängig. Aufgrund dieser Komplexität der Abläufe und der Abhängigkeiten innerhalb einer Brennstoffzelle (bzw. eines Brennstoffzellenstacks) ist eine Diagnose nötig, um Aussagen über die Stromdichteverteilung innerhalb der MEA zu treffen.

Der trivialste Weg, die Stromdichteverteilung innerhalb der Brennstoffzellen zu erfassen, wäre die direkte Messung mit speziellen Sensoren, die man in die Zelle einbringen würde. Gewiss wäre dies aber nicht der optimale Weg, da durch diesen Eingriff ins Innere der Zelle die komplexen chemischen und physikalischen Vorgänge direkt beeinflusst und manipuliert würden. Infolgedessen wären die auf diese Weise erfassten Informationen bei Weitem nicht allgemeingültig. Um diese Tatsache zu umgehen, ist man also zwangsweise auf nicht-invasive<sup>4</sup> Messmethoden angewiesen. Bekanntlich erzeugt jeder Strom ein Magnetfeld, das mit geeigneten Messgeräten bis zu einer bestimmten Genauigkeit gemessen werden kann. Folglich bietet sich eine tomographische<sup>5</sup> Untersuchung des Brennstoffzellenstacks an, bei der durch „abtasten“ des Magnetfeldes um den Stack herum, Rückschlüsse über die Stromdichteverteilungen innerhalb der MEAs erlangt werden sollen.

Tomographieverfahren liefern jedoch im allgemeinen keine eindeutigen Ergebnisse. Beispielsweise erzeugt eine Punktladung  $Q$  an einer beliebigen Position  $P$  das gleiche elektrische Feld wie eine Rotationssymmetrische Ladungsverteilung der gleichen Gesamtladung  $Q$  am gleichen Ort  $P$ . Demzufolge kann durch die Feldmessung die genaue Form der Ladungsverteilung nicht eindeutig bestimmt werden. Ähnlich ist es bei der Entstehung von Magnetfeldern.

Zur Verdeutlichung dieser Problematik nehme man an, dass ein in eine Richtung sehr weit ausgedehnter Leiter, mit einer bestimmten Stromdichteverteilung existiert. Wenn nun die

---

<sup>2</sup>einheitlich, gleichmäßig

<sup>3</sup>**Partialdruck:** Druck, der in einem Gasgemisch, einem bestimmten Gas zugeordnet werden kann

<sup>4</sup>lat. invadere: einfallen, eindringen

<sup>5</sup>**Tomographie:** bildgebende Verfahren, mit der drei Dimensionale Bilder eines Objektes durch nicht-invasive Messungen erzeugt werden

von der Ausdehnungsrichtung unabhängigen Stromdichten an jedem Punkt dieses Leiters mit zylindersymmetrischen Stromdichten um diesen Punkt ersetzt wird, verändert sich das Magnetfeld nicht. Dieses abstrakte aber zur Veranschaulichung angebrachte Beispiel verdeutlicht, dass mit unterschiedlichen Variationen von Stromdichteverteilungen das gleiche Magnetfeld erzeugt werden kann. Im Umkehrschluss folgt daraus, dass die Rekonstruktion der Stromdichteverteilung aus gegebenem Magnetfeld also mit Hilfe der Magnetotomographie [1] mit Problemen und Unsicherheiten behaftet ist.

Es stellt sich also die grundlegende Frage: Ist es möglich, die Stromdichteverteilung im Inneren einer Brennstoffzelle mit Hilfe der Magnetotomographie eindeutig zu bestimmen? Wenn ja, kann mit vertretbarem Messaufwand eine akzeptable Genauigkeit der Stromdichteverteilung erreicht werden? Inwieweit ändert sich die Problemstellung, wenn man die Untersuchungen auf einen Brennstoffzellenstack ausweitet? Welche technischen Methoden bieten sich zur Erhöhung dieser Genauigkeit an und wie effektiv sind diese Methoden? Diese Fragen werden im weiteren Verlauf dieser Diplomarbeit beantwortet.

### 1.3 Bisherige Ergebnisse

Die Fragestellung zur eindeutigen Lösbarkeit des oben beschriebenen Tomographieproblems wurde auch in der Diplomarbeit *„Numerische Sensitivitätsanalyse für ein Tomographieproblem bei Brennstoffzellen“* von Schmidt [4] behandelt. Unter bestimmten Voraussetzungen hat sich diese Problemstellung als durchaus lösbar erwiesen. In jener Arbeit wurde ein diskretes Modell einer einzelnen vereinfachten Brennstoffzelle erzeugt und untersucht, welche Auflösungen der Diskretisierung Variationen der Stromdichteverteilung innerhalb der MEA erzeugen, die mit der gegebenen Messgenauigkeit des Magnetfeldmessgerätes noch erfasst werden können. Es wurde also zunächst aus den Stromdichteverteilungen innerhalb der MEA das resultierende Magnetfeld berechnet (Vorwärtsproblem) und herausgestellt, bei welchen relativen Fehlern der Messapparaturen eine Invertierung dieses Problems möglich ist, sodass man mit dieser Vorschrift aus dem Magnetfeld die Stromdichteverteilung rekonstruieren kann (Rückwärtsproblem). Eine wichtige Rolle spielt dabei die Position der Messsonden. Je näher diese an die Brennstoffzelle gebracht werden, desto höher ist die relative Genauigkeit der Ergebnisse. Denn Magnetfelder werden nach außen immer glatter, sodass man ab einer bestimmten Entfernung z.B. zwei nah beieinander liegende gleichstarke Dauermagneten von einem großen Dauermagneten doppelter Stärke nicht mehr unterscheiden kann. Anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass die unmittelbare Nähe der Messsonden an der Brennstoffzelle besonders vorteilhaft ist. Ein anderes Resultat dieser Arbeit ist, dass die Magnetfeldmesspunkte an den Stirnseiten der Brennstoffzelle von besonderer Bedeutung sind. Mit welchen Konzepten man den Magnetfeldmesspunkten im Hinblick auf ihre Relevanz für die Rekonstruktion der Stromdichteverteilung eine Gewichtung zuordnen kann, wurde auch in einer weiteren Diplomarbeit *„Untersuchungen*

zur Reduktion des Messaufwandes bei der Magnetotomographie von Brennstoffzellen“ von Telschow [5] behandelt. Es wurden mit unterschiedlichen Auflösungen der Diskretisierung Verfahren getestet, wobei sich herausstellte, dass ein nicht geringer Anteil der Magnetfeldmesspunkte vernachlässigt werden kann, mit einem erfreulichen Nebeneffekt: die relative Genauigkeit wurde durch die Messpunktreduktion sogar erhöht. Wie auch schon in [4] erkannt wurde, sind die Magnetfeldmesspunkte an den Stirnseiten wesentlich, sodass weitere Messebenen um die Zelle komplett unberücksichtigt bleiben.

Diese Reduktion wird mittels einer speziellen Funktion, der  $\zeta$ -Funktion, erreicht, die jedem Magnetfeldmesspunkt ein Gewicht zuordnet, das davon abhängt, inwieweit dieser einen brauchbaren Anteil zur Rekonstruktion der Stromdichteverteilung innerhalb der MEA beiträgt. Anschließend werden alle Magnetfeldmesspunkte vernachlässigt, die eine geringere Gewichtung als eine festgelegte Schranke  $d_\zeta$  aufweisen.

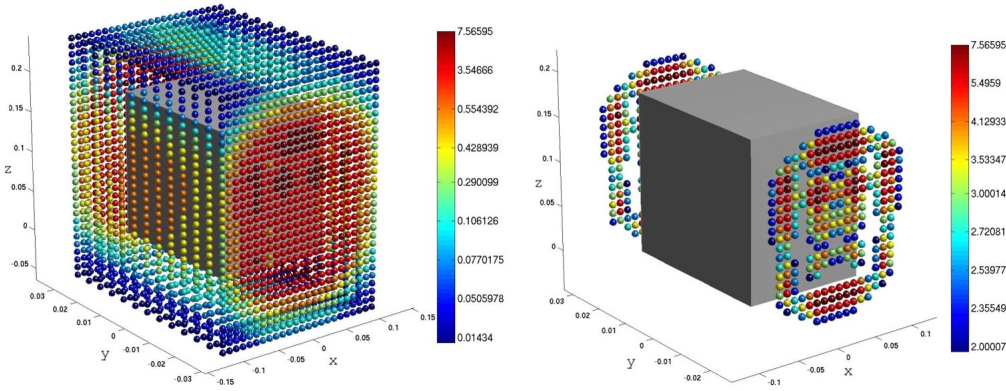


Abbildung 1.3: Grafiken vor und nach der Messpunktreduktion einer einzelnen DMFC mit  $d_\zeta = 2$

Zugleich wurden in dieser Arbeit die Grenzen der Magnetotomographie aufgezeigt. Bei einer einzelnen Zelle ist es kaum möglich, eine bessere Auflösung für die rekonstruierte Stromdichteverteilung als  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$  zu erhalten. Ansatzweise wurden auch die Schwierigkeiten und Grenzen der Magnetotomographie bei Brennstoffzellenstacks dargelegt. In solch einem Fall können Störungen im Inneren des Stacks von den weiter entfernten Messpunkten an den Stirnseiten nicht erfasst werden. Diese würden lediglich aufschlussreiche Informationen über die jeweils erste anliegende Zelle am Rand des Stacks geben, und verlieren somit ihre Bedeutung für die Detektierung von Perturbationen<sup>6</sup>, die weiter im Stackinneren liegen. Jedoch ist es gerade sehr wichtig, die Stromdichteverteilungen weiter im Stackinneren zu erkennen, um dort mögliche Störungen in den MEAs feststellen zu können, ohne diese direkt messen zu müssen, bzw. ohne „reingucken“ zu müssen. Selbst wenn man an einer einzelnen Zelle, die schon durch die direkt anliegenden Stahlschichten (elektrische Leitfähigkeit etwa  $1 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ) eine günstigere Ausgangssituation hat, die

<sup>6</sup>Perturbation = Störung

Messpunkte an den Stirnflächen weglässt, ist eine Auflösung von  $3\text{cm} \times 3\text{cm}$  für die Stromdichteverteilung schon völlig unsicher. Im Falle eines Stacks, liegen in der Umgebung einer MEA nur Grafitsschichten mit einer viel geringeren Leitfähigkeit von etwa  $4000 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ , die in dem Sinne keine Begünstigung darstellen.

Eine Idee, wie genauere Ergebnisse erzielt werden können, wäre der Einsatz von genaueren Messgeräten. Die momentan üblichen Messgeräte haben eine Genauigkeit von  $12\text{nT}$ . Bei Messapparaturen mit höherer Genauigkeit, wie z.B. den SQUID<sup>7</sup>, könnte man eine höhere Auflösung der Stromdichteverteilung berechnen, wäre dann aber gezwungen, sehr aufwendige Vorkehrungen zur Abschirmung von Störeinflüssen, wie dem Erdmagnetfeld oder Magnetfeldern von anderen elektrischen Geräten, zu treffen, da derartig genaue Geräte mit bis zu  $1\text{fT}$  Genauigkeit dafür extrem empfindlich sind. Außerdem ist die Anschaffung solcher Geräte besonders kostenintensiv, daher wird nach kostengünstigeren Methoden, den Ausgangszustand des Brennstoffzellenstacks für die Magnetotomographie zu verbessern, gesucht. Dazu folgt mehr im nächsten Abschnitt.

Im Laufe der Arbeit wird zur Vertiefung auf [4] und [5] verwiesen.

## 1.4 Lösungsansatz und Zielsetzung

Ziel ist es also, mit einfachen Methoden die Voraussetzungen des DMFC-Stacks so zu verbessern, dass man anhand der aus der Magnetotomographie[3] ermittelten Informationen eine akzeptable Annäherung der Stromdichteverteilung im Inneren des Stacks (genauer in den einzelnen MEAs) mit geeigneter Auflösung rekonstruieren kann. Dies ist zur Feststellung von Defekten bzw. allgemein von Abnormitäten innerhalb der MEAs unvermeidlich. Bei diesen Betrachtungen muss auch der Effekt der Fehlerausbreitung berücksichtigt werden. Dies bedeutet also, dass im Falle eines Defektes, dieser sich bis 7. Nachbarzelle noch auswirken kann [6], weil der Strom sozusagen einen Umweg um den Defekt machen muss, und nicht sofort in seine natürliche Bahn zurückkehren kann.

Dabei spielt die Leitfähigkeit der Materialien, die zwischen den einzelnen MEAs liegen, die zentrale Rolle. Momentan liegen zwischen zwei MEAs jeweils zwei Grafitsschichten mit einer elektrischen Leitfähigkeit von etwa  $4000 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ , die offensichtlich für eine schnelle Homogenisierung der Ströme nicht ausreicht und der Fehler sich somit ausdehnt. Dies ist zweifellos ein unerwünschter Effekt in Bezug auf die Leistungsfähigkeit des Brennstoffzellenstacks. Andererseits liegt aber die Erwägung nahe, dass im Falle einer Fehlerausdehnung eines Defektes, dieser durch das gemessene Magnetfeld besser zu detektieren ist, da sich diese Inhomogenität über mehrere Zellen hindurch erstreckt.

Trotzdem ist eine Verminderung der Fehlerausbreitung zur Leistungssteigerung des Brennstoffzellenstacks erwünscht, und kann mit einer einfachen technischen Methode bewerk-

---

<sup>7</sup>**SQUID** ist die Abkürzung für *Superconducting QUantum Interference Device* (*Supraleitende Quanteninterferenzeinheit*). Ein SQUID ist ein Sensor zur sehr präzisen Messung extrem geringer Magnetfeldvariationen.

stellt werden. Die Idee ist es den Brennstoffzellenstack derart zu konstruieren, sodass zwischen den einzelnen Brennstoffzellen ein nicht magnetisches Material mit besonders hoher elektrischer Leitfähigkeit eingebaut wird. Hier bieten sich optimalerweise Aluminiumplatten an. Aluminium ist nicht magnetisch, und im Hinblick auf die zu messenden Magnetfelder unproblematisch. Die sehr hohe Leitfähigkeit des Aluminiums von  $37.66 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$  bewirkt eine schlagartige Homogenisierung der Ströme [6], sodass im Falle eines Defektes die Auslenkung der Ströme auf einen kleinen Bereich von maximal einer Brennstoffzelle konzentriert wird. Diesen Effekt veranschaulichen die unten aufgeführten Grafiken, wo der Stromverlauf in einem Brennstoffzellenstack für beide Varianten dargestellt wird:

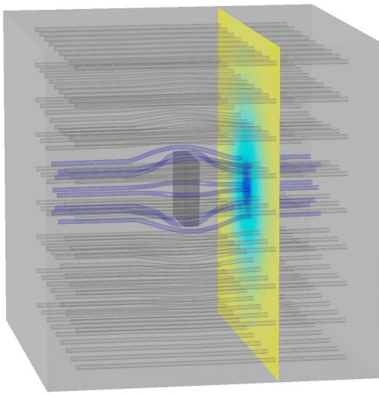


Abbildung 1.4: Verlauf des Stromes bei einem Defekt innerhalb eines Brennstoffzellenstacks ohne Aluminiumplatten. Eingezeichnet sind Defekt einer Zelle und MEA der ersten Nachbarzelle.

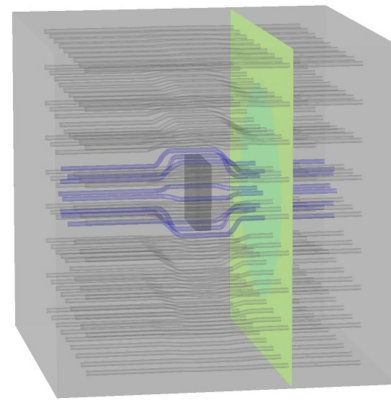


Abbildung 1.5: Verlauf des Stromes bei einem Defekt innerhalb eines Brennstoffzellenstacks mit Aluminiumplatten. Eingezeichnet sind Defekt einer Zelle und MEA der ersten Nachbarzelle.

Ein Defekt in einer Zelle führt zu einem inhomogenen Stromdurchfluss. In Abb.1.4 und Abb.1.5 sind neben den Strömen am Defekt vorbei die Ströme durch die unbeschädigte MEA der ersten Nachbarzelle gezeigt. Während in Abb.1.4 die Ströme in diese Ebene nicht homogen eintreffen, ist in Abb.1.5 schon in der ersten Nachbarzelle ein weitgehend gleichmäßiger Stromfluss erreicht. Es können also im regulären Betrieb entstehende Inhomogenitäten der Stromdichteverteilungen auf den MEAs kompensiert und eine weitgehende Homogenisierung erzielt werden. Natürlich müssen infolgedessen Ausgleichsströme in den der zur defekten Zelle benachbarten Aluminiumplatten fließen, die folglich einen Einfluss auf das entstehende Magnetfeld haben.

Es stellt sich unweigerlich die Frage, ob das Wegfallen der Fehlerausstrahlung und zugleich das Hinzukommen der Ausgleichsströme in den Aluminiumplatten in Bezug auf die Detektierung eines Defektes bzw. auf die Rekonstruktion der Stromdichteverteilungen

einen Vorteil oder einen Nachteil darstellt. Das Einbauen der Aluminiumplatten im Brennstoffzellenstack ist auch mit Nachteilen verknüpft, da die Gesamtlänge erhöht wird<sup>8</sup>. Unter welchen Vorraussetzungen ist nun dieser Eingriff vorteilhaft? Wie muss die Anordnung der Magnetfeldmesspunkte sein?

Unter welchen Voraussetzungen können mehrere Defekte in einem Stack lokalisiert werden und wie hoch sind dafür die Genauigkeitsanforderungen? Die Beantwortung dieser Fragen stellt den Kern der vorliegenden Arbeit dar, wobei Vergleiche zwischen Brennstoffzellenstacks mit und ohne Aluminiumplatten gezogen werden.

Eine Weiterführung dieser Idee, und zwar das Einbauen von geschlitzten Aluminiumplatten, wurde in einer Diplomarbeit [7] von Both behandelt. Hier werden die Schlitze in den Aluminiumplatten parallel angebracht, sodass sie sich nicht durch die ganze Platte hindurch erstrecken, sondern pro Schlitz noch ein kleiner Steg vorhanden ist. Auf diese Weise wird erreicht, dass die Ausgleichsströme in der Platte anhand der Stege an die Oberfläche des Stacks gezwungen werden, wo sie mit Hilfe der Magnetotomographie besser zu detektieren sind. Die Idee ist, mittels der Magnetotomographie so gut wie möglich die Ströme, die durch die Stege fließen, zu erfassen, um anhand dieser Information einen Defekt innerhalb des Stacks zu lokalisieren. Dazu wird zunächst die Abhängigkeit der Leitfähigkeiten innerhalb der MEAs zu den Stegströmen herausgestellt, um anschließend festzustellen, inwieweit sich eine Veränderung der Stegströme auf das gemessene Magnetfeld auswirkt.

Wie man mit der Information über die Stegströme unabhängig von der Magnetotomographie Aussagen über die Stromverteilung innerhalb einer MEA treffen kann, wurde bereits in einer weiteren Diplomarbeit [6] diskutiert.

---

<sup>8</sup>Auch der Stromwiderstand wird - allerdings nur sehr geringfügig - vergrößert.

# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige mathematische und physikalische Grundlagen zusammengefasst, die für das weitere Verständnis dieser Ausarbeitung erforderlich sind.

### 2.1 Mathematische Grundlagen

#### 2.1.1 Grundkenntnisse der Vektoranalysis

**Definition 2.1.1 (Gradient)**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  ein Skalarfeld, dann ist durch

$$\text{grad } f := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \right)^T,$$

der **Gradient** von  $f$  definiert.

**Definition 2.1.2 (Divergenz)**

Sei  $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \ni x \rightarrow F(x) \in \mathbb{R}^n$  mit  $F = (F_1, \dots, F_n)^T$  ein Vektorfeld, dann ist die **Divergenz** von  $F$  definiert durch

$$\text{div } F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i$$

Unter der Annahme, dass  $F$  die Strömungen eines Gebietes  $\Omega$  beschreibt, gibt die Divergenz von  $F$  an einer bestimmten Stelle  $x$  an, ob die Strömung in der Umgebung von  $x$  zu diesem Punkt hin zeigt oder von diesem Punkt weg führt, bzw. wo das Vektorfeld  $F$  Quellen und Senken besitzt. Demnach wird  $F$  mit  $\text{div}(F) = 0$  quellenfrei genannt. Es folgt eine weitere Definition, die für die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge bedeutsam ist:

**Definition 2.1.3 (Rotation)**

Sei  $F = (F_x, F_y, F_z)^T \in \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld, so definiert

$$\operatorname{rot} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix}$$

die **Rotation** von  $F$ .

Betrachtet man nun  $F$  wieder als Strömungsfeld, so beschreibt die Rotation für die Umgebung von jedem Punkt  $x$ , wie schnell und um welche Achse die Teilchen rotieren.

**Bemerkung 2.1.4**

(i) In der Physik wird der  $\nabla$ -Operator mit  $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T \in \mathbb{R}^3$  beschrieben. Somit folgt für die Divergenz die Schreibweise

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

und für die Rotation

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F$$

(ii) Zusätzlich ist der Laplace-Operator vorhanden, der folgendermaßen definiert ist

$$\Delta := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla^2$$

Bevor nun weiterführende Grundlagen aufgezeigt werden, hier noch der besonders wichtige Integralsatz von Gauß:

**Satz 2.1.5 (Integralsatz)**

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, mit stückweise differenzierbarem Rand  $\partial\Omega$ . Weiterhin sei  $F$  ein Vektorfeld in  $\Omega$ , das stetig differenzierbar in  $\Omega$  und stetig auf  $\partial\Omega$  ist. Dann gilt folgende Beziehung, wenn  $\nu$  die äußere Normale an  $\Omega$  bezeichnet

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu F \, ds$$

**2.1.2 Die Singulärwertzerlegung**

Anhand der Singulärwertzerlegung kann man die Singulärwerte einer beliebigen Matrix ablesen, die ähnlich wie die Eigenwerte einer quadratischen Matrix, die Charakteristika einer Matrix liefern.



**Definition 2.1.6 (Singulärwertzerlegung)**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine beliebige Matrix, dann existieren  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthonormale Matrizen, sowie eine Matrix

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n)$$

wobei  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$  gilt, sodass

$$A = U \Sigma V^T$$

gilt. Der äquivalente Ausdruck  $U^T A V = \Sigma$  heißt **Singulärwertzerlegung**, wobei die  $\sigma_i$  in  $\Sigma$  die **Singulärwerte** sind.

**Satz 2.1.7**

(i) Ist  $U^T A V = \Sigma$  eine Singulärwertzerlegung der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , dann ist  $V^T \Sigma^T U$  eine Singulärwertzerlegung von  $A^T$ , d.h. die Singulärwerte von  $A$  und  $A^T$  sind identisch.

(ii) Gilt für ein beliebiges festes  $r \in \mathbb{N}$ , mit  $0 < r < p$

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

so folgt daraus  $\text{rang}(A) = r$ .

(iii) Die Quadrate der Singulärwerte  $\sigma_i^2$  entsprechen den Eigenwerten von  $AA^T$  bzw.  $A^T A$ , alle weiteren Eigenwerte beider Matrizen sind 0.

Um Aussagen über die numerischen Eigenschaften einer Matrix  $A$  treffen zu können, ist der Verlauf der Singulärwerte besonders von Bedeutung. Vorzugweise möchte man wissen, wie sich Fehler in der Eingabe in Bezug auf das Resultat fortpflanzen. Ein Maß dazu ist die sogenannte Konditionzahl  $\kappa$ , die aus dem Verhältnis des größten und kleinsten Singulärwertes besteht. Es gilt also

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

für  $\text{rang}(A) = r$ . Idealerweise sollte dieser Wert, der das Ausmaß der Fehlerverstärkung repräsentiert, möglichst klein sein.

### 2.1.3 Die Pseudoinverse

Die Pseudoinverse, auch verallgemeinerte Inverse genannt, ist eine Verallgemeinerung der Invertierung einer Matrix auf singuläre und nicht quadratische Matrizen. Da in der Anwendung, wie auch in dieser Arbeit, im allgemeinen keine quadratischen Matrizen entstehen, hat die Pseudoinverse insbesondere beim inversen Problem (siehe Kapitel 3) eine große Bedeutung.

Man betrachte dazu das folgende Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.1)$$

wobei im Folgenden  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  (2-Norm) gilt. Aufgrund der Konvexität von  $\|Ax - b\|^2$  existiert eine Lösung, die aber im allgemeinen nicht eindeutig ist. Sie ist nur eindeutig, wenn der Nullraum von  $A$   $\mathcal{N} = \{0\}$  ist, was bei nicht vollem Rang nicht zutrifft. Daraus folgt, wenn  $\tilde{x}$  eine Lösung von (2.1) ist, dann ist auch  $x = \tilde{x} + y$  mit einem beliebigen  $y \in \mathcal{N}(A)$  eine Lösung. Eine Möglichkeit das  $y$  zu wählen, ist die Lösung der folgenden Problemstellung.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \quad \text{mit} \quad x = \min_{y \in \mathcal{N}(A)} \|\tilde{x} + y\|^2 \quad (2.2)$$

#### Definition 2.1.8 (Pseudoinverse)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit maximalem Rang, folglich ist durch

$$A^+ := (A^T A)^{-1} A^T$$

die zugehörige **Pseudoinverse** von  $A$  definiert.

**Satz 2.1.9** Sei nun  $x \in \mathbb{R}^n$  die Lösung von (2.2), dann existiert mit

$$x = A^+ b, \quad \forall b \in \mathbb{R}^n$$

eine eindeutige Lösung.

#### Bemerkung 2.1.10

(i) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und regulär, dann folgt

$$A^+ = A^{-1}$$

(ii) Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $A = U \Sigma V^T$  die Singulärwertzerlegung von  $A$ , dann ist die Pseudoinverse von  $A$  gegeben durch

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T \quad \text{mit} \quad \Sigma^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

## 2.2 Physikalische Grundlagen

Elektromagnetische Vorgänge sind von den Gesetzen der Elektrodynamik abhängig, die unter anderem elektrische und magnetische Felder und Potentiale sowie die Dynamik elektrisch geladener Objekte beschreiben. Die Grundbausteine dafür legte der britische Physiker *James C. Maxwell*<sup>1</sup> mit seinen Gleichungen, die im Folgenden aufgezeigt werden.

### 2.2.1 Maxwellsche Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen stellen die Beziehung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, sowie deren Erzeugung durch Ladungen und Ströme dar. Zunächst einige wichtige Bezeichnungen:

$H$	$:=$	magnetisches Feld
$E$	$:=$	elektrisches Feld
$B$	$:=$	magnetische Flussdichte
$D$	$:=$	elektrische Flussdichte
$j$	$:=$	Stromdichte
$\rho$	$:=$	Ladungsdichte

#### 1. Maxwell Gleichung: *Das Durchflutungsgesetz*

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial}{\partial t} D + j \quad (2.3a)$$

besagt, dass jedes zeitlich veränderliche elektrische Feld ein magnetisches Wirbelfeld erzeugt.

#### 2. Maxwell Gleichung: *Das Induktionsgesetz*

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial}{\partial t} B \quad (2.3b)$$

sagt aus, dass jedes zeitlich veränderliche magnetische Feld ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt.

#### 3. Maxwell Gleichung: *Die elektrische Quelle*

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (2.3c)$$

Die Quelle elektrischer Felder sind elektrische Ladungen.

---

<sup>1</sup>*James Clerk Maxwell*; (geb. 13. Juni 1831 in Edinburgh; gest. 5. November 1879 in Cambridge) ein schottischer Physiker.

#### 4. Maxwell Gleichung: Die magnetische „Quelle“

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (2.3d)$$

Folglich sind Magnetfelder quellenfrei und im  $\mathbb{R}^3$  stets Wirbelfelder.

Für stationäre Felder erhalten wir

$$\operatorname{rot} H = j \quad (2.4a)$$

$$\operatorname{rot} E = 0 \quad (2.4b)$$

Die Gleichung für die magnetische Flussdichte bleibt erhalten.

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (2.4c)$$

Mit weiteren Umformungen unter Anwendung des Integralsatzes von Gauß 2.1.5 erhalten wir für stationäre Felder

$$\operatorname{div} j = 0 \quad (2.5)$$

was die Quellenfreiheit der Stromdichte bedeutet. Mit (2.4a) folgt direkt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} H) = 0 \quad (2.6)$$

Zusammen mit dem lokalen Ohm'schen Gesetz

$$j(r) = \sigma(r) \cdot E(r) \quad (2.7)$$

hat man nun eine ausreichende Anzahl an Gleichungen, die das vorliegende Problem beschreiben.  $\sigma(r)$  stellt dabei die elektrische Leitfähigkeit in  $r = (x, y, z)^T$  dar, wobei  $r$  ein beliebiger Punkt im Raum ist. Die vierte Maxwell Gleichung wird nicht benötigt.

Die Herleitung der Maxwell Gleichungen kann in [10], sowie die obigen Umformungen auf detailliertere Weise in [5] nachgelesen werden.

**Bemerkung 2.2.1** *Das elektrische Feld  $E$  ist ein Gradientenfeld, sodass ein Skalarfeld  $u$  mit*

$$E = -\operatorname{grad} u$$

*existiert.  $u$  ist dabei das Potential von  $E$ .*

### 2.2.2 Das Biot-Savart Gesetz

Nachdem nun im letzten Abschnitt die Beziehungen von elektrischen und magnetischen Feldern sowie deren Verbindung zu Ladungen und Strömen dargestellt wurden, fehlt noch die Herausstellung der Gesetzmäßigkeit, die die magnetische Feldstärke  $H$  mit der Stromdichte  $j$  in Zusammenhang bringt. Anhand dieses Gesetzes soll es möglich sein, durch die Kenntnis der räumlichen Stromverteilungen die ebenso räumlichen magnetischen Feldstärkeverteilungen zu berechnen. Diesen Zusammenhang stellten die beiden französischen Physiker *Jean-Baptiste Biot* (1779-1862) und *Félix Savart* (1791-1841) her, indem zunächst folgende Beziehung betrachtet wurde

$$B = \mu H \quad (2.8)$$

Das Verhältnis zwischen der magnetischen Flussdichte  $B$  und des magnetischen Feldes  $H$  wird als linear angenommen, mit dem Permeabilitätsfaktor  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ , wobei  $\mu_0$  die Permeabilität des Vakuums und  $\mu_r$  die relative Permeabilität des spezifischen Materials beschreibt.

Mit Hilfe der Ausarbeitungen im letzten Abschnitt, sowie der sogenannten *Coulomb-Eichung*<sup>2</sup> erhält man nach einigen Umformungen, die in [5] nachzulesen sind, die Gleichung

$$H(r) = \int_{\Omega} \text{rot}(\phi(r, s)j(s))ds$$

mit  $\phi(r, s) = \frac{1}{4\pi \|r - s\|} \forall r \neq s$  [5]. Unter Verwendung der Wirbelfreiheit der Stromdichte sowie des antisymmetrischen Verhaltens des Kreuzproduktes gelangt man zur endgültigen Form des **Biot-Savart Gesetzes**:

$$H(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(s) \times (r - s)}{\|r - s\|^3} ds \quad (2.9)$$

---

<sup>2</sup>*Die Coulomb-Eichung* ist eine mögliche Einschränkung des Vektorpotentials  $A$ , sodass  $\text{div}(A) = 0$  gilt.

## Kapitel 3

# Abhängigkeit der Messgrößen und Messpunktreduktion

In diesem Kapitel werden zusammenfassend die Abhängigkeiten der Stromdichteverteilung von der Leitfähigkeit und ihr Zusammenhang zum Magnetfeld herausgestellt, sowie auf das inverse Problem eingegangen, und diese Zusammenhänge mit mathematischen Formeln geeignet beschrieben. Tiefgreifendere Ausarbeitungen dazu können aus den Quellen [4, 5] entnommen werden. Zusätzlich wird die Bedeutung der Singulärwerte für die Genauigkeitsanforderungen an die Magnetfeldmessgeräte herausgestellt, sowie schließlich auf die Messpunktreduktion eingegangen.

### 3.1 Die Stromdichteverteilung

Da das Interesse bei der Stromdichteverteilung insbesondere innerhalb der MEAs liegt, müssen dazu die Abhängigkeiten zu den Materialeigenschaften herausgestellt werden. Aufgrund der Materialgleichung (2.7) wissen wir, dass die Stromdichteverteilung  $j(r)$  u.a. durch die elektischen Leifähigkeit  $\sigma(r)$  des entsprechenden Materials bestimmt ist. Diese ist für die unterschiedlichen Schichten des Brennstoffzellenstacks, wie Grafit, Stahl oder Aluminium, gegeben. Für die MEA Schichten, die nicht weiter auf ihre Stromdichteverteilung  $j(r)$  untersucht werden, wird auch zunächst eine Leitfähigkeit angenommen. Es bleiben also nur die Leitfähigkeiten der MEAs unbekannt, deren Stromdichteverteilung anhand der Magnetotomographie zu rekonstruieren ist. Zur Berechnung dieser bzw. zur mathematischen Beschreibung der Abhängigkeiten wurden im letzten Kapitel die Grundlagen aufgelistet.

Daher wissen wir mit der Eigenschaft der Quellenfreiheit für stationäre Felder (2.5) sowie der Bemerkung (2.2.1) und der oben erwähnten Materialgleichung (2.7), dass sich für die Stromdichteverteilung folgende elliptische Differentialgleichung ergibt.

$$-div(\sigma(r) \cdot grad u) = 0 \tag{3.1}$$

Mit passenden Randbedingungen gibt es für jedes gegebene positive  $\sigma(r)$  eine eindeutige Lösung  $u$  des Potentials, mit der wiederum die Stromdichteverteilung  $j(r)$  bestimmt ist. Betrachten wir weiterhin die Abhängigkeit von  $j(r)$  zum Magnetfeld  $H$ . Unter Berücksichtigung der entsprechenden Maxwellgleichungen für stationäre Felder (2.4a) und (2.4c) sowie der Gesetzmäßigkeit zwischen dem magnetischen Feld und der magnetischen Flussdichte (2.8) wurde im letzten Kapitel das Biot-Savart Gesetz hergeleitet (siehe 2.2.2), welches auch hier direkt angewendet werden kann.

$$H(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{j(s) \times (r - s)}{\|r - s\|^3} ds$$

Wenn man also die Stromdichteverteilung  $j(r)$  bestimmt hat, kann mit der Annahme, dass ausschließlich im Gebiet  $\Omega$  Ströme herrschen, das dazugehörige Magnetfeld  $H$  sofort eindeutigerweise berechnet werden. Unter welchen Voraussetzungen die Inversion dieses Vorgangs möglich ist, wird im anschließenden Abschnitt erläutert.

## 3.2 Das inverse Problem

In den einleitenden Abschnitten wurde bereits das Problem beschrieben, dass ein Magnetfeld  $H$  nicht eindeutig auf eine Stromdichteverteilung  $j(r)$  zurückzuführen ist. Es gilt also mit den ausgearbeiteten Bedingungen bei den Grundlagen und mit weiteren Methoden die Anzahl der möglichen Stromdichteverteilungen einzuschränken.

Zusammengefasst liefern die Gleichungen (2.5), (2.7) und die 2. Maxwellgleichung (2.4b) den folgenden Zusammenhang

$$\text{rot} \left( \frac{j(r)}{\sigma(r)} \right) = 0$$

welcher die möglichen Variationen für  $j(r)$  erheblich verringert. Es ist jedoch eine weitere Einschränkung möglich. Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen ist bekanntermaßen eine Diskretisierung erforderlich. Seien dazu  $\check{H}$  die Diskretisierung des Magnetfeldes  $H$ , sowie  $\check{j}$  die diskrete Form der Stromdichte  $j(r)$ . Für  $N_J$  Stromdichtekomponenten hätte der Vektor  $\check{j}$  also eine Dimension  $3N_J$ , da pro Diskretisierungspunkt 3 Stromdichtekomponenten für jede Richtung (x, y, z) vorhanden sind. Ebenfalls sei  $\check{\sigma}$  die Diskretisierung für die Leitfähigkeit  $\sigma(r)$  in der MEA mit  $N_S$  Komponenten.

Interessant ist nun, wie sich eine Veränderung der diskreten Leitfähigkeit  $\check{\sigma}$  auf die diskrete Stromdichte  $\check{j}$  auswirkt. Dafür gilt

$$d\check{j} = \mathcal{C} d\check{\sigma}, \quad \mathcal{C} = \frac{\partial \check{j}}{\partial \check{\sigma}}$$

Diese Linearisierung des Operators, der  $\sigma$  auf  $j$  abbildet, ist angebracht, da mögliche Abweichungen in einer Umgebung eines Arbeitspunktes betrachtet werden [4, 5]. Betrachten

wir nun  $\mathcal{C}$  genauer

$$\mathcal{C} = \left( \frac{\partial \check{j}}{\partial \check{\sigma}_1}, \dots, \frac{\partial \check{j}}{\partial \check{\sigma}_{N_S}} \right)$$

und dessen Singulärwertzerlegung

$$\mathcal{C} = \mathcal{U}_C \mathcal{W}_C \mathcal{V}_C^T \quad (3.2)$$

Bei Betrachtung der in der Diagonalmatrix  $\mathcal{W}_C$  enthaltenen Singulärwerte  $s_i$  ist zu erkennen, dass anhand eines Kriteriums hier ebenfalls die Variation eingeschränkt werden kann. Denn je kleiner  $s_i$  ist, desto höher müsste ein  $d\check{\sigma}$  in Richtung des  $i$ -ten Spaltenvektors  $u_i$  von  $\mathcal{U}_C$  sein, damit die Variation bemerkbare Auswirkungen hat. Dies würde aber das Zulassen unphysikalisch großer  $\sigma$ -Werte bedeuten. Um das zu verhindern, werden Singulärwerte ab einer gewissen Grenze

$$\frac{s_i}{s_1} > \varepsilon_j \quad (3.3)$$

eliminiert und somit nicht mehr in Betracht gezogen.

Sei  $N_{G_C}$  die Grenze der relevanten Singulärwerte mit  $i \leq N_{G_C} \equiv N_{G_C}(\varepsilon_j)$ . Dann lässt sich die Variation der Stromdichte wie folgt schreiben

$$d\check{j} = \sum_{k=1}^{N_{G_C}} d\alpha_k u_k.$$

An dieser Stelle sind nun die Variationen der voneinander unabhängigen  $d\alpha_i$  von Interesse, die mit der Variation des diskreten Magnetfeldes  $d\check{H}$  in Zusammenhang gebracht werden müssen. Wie sich nun eine Veränderung von  $d\alpha_i$  auf die Variation des diskreten Magnetfeldes auswirkt, stellt die folgende Gleichung dar.

$$d\check{H} = \mathcal{S} d\alpha, \quad \mathcal{S} = \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{U}_C. \quad (3.4)$$

Die Matrix  $\mathcal{B}$  repräsentiert dabei den Biot-Savart Operator, während  $\mathcal{A}$  eine Diagonalmatrix ist, die die zu den Stromdichten gehörenden Flächen beinhaltet. Sei  $\mathcal{S} = \mathcal{U}_S \mathcal{W}_S \mathcal{V}_S^T$  die Singulärwertzerlegung von  $\mathcal{S}$ , dann kann analog zu den Singulärwerten von  $\mathcal{C}$  ebenfalls durch ein Kriterium die Anzahl der relevanten Singulärwerte  $s_i$  in  $\mathcal{W}_S$  eingeschränkt werden. Auch hier bleibt ab einer Grenze  $N_{G_S}$  mit  $\frac{s_i}{s_1} > \varepsilon_k$  ein Teil der Singulärwerte unberücksichtigt. Es sei noch erwähnt, dass die Matrix  $\mathcal{S}$  im folgenden Kapitel über die Messpunktreduktion eine wichtige Rolle spielt.

Die Frage ist nun, ob man aus der gegebenen Magnetfeldvariation  $d\check{H}$  das zugehörige  $d\alpha$  aus (3.4) stabil bestimmen kann, d.h. mit anderen Worten, ob das Ausgleichsproblem

$$\| d\check{H} - \mathcal{S} d\alpha \|_2 \longrightarrow \min \quad (3.5)$$



gut konditioniert ist und somit eindeutig gelöst werden kann. Dies ist der Fall wenn  $N_{G_C} = N_{G_S}$  gilt. Man beachte, dass die Dimension von  $N_{G_C}$  abhängig von der Feinheit der Diskretisierung ist.

### 3.3 Singulärwerte und Reichweite der gegenseitigen Beeinflussung von Magnetfeldern im Brennstoffzellenstack

Das inverse Problem beim Brennstoffzellenstack ist wesentlich schwieriger als bei der Brennstoffzelle. Ein Grund dafür ist, dass Meßpunkte in der Nähe der MEA-Oberflächen nicht zur Verfügung stehen. Hierauf wollen wir in diesem Abschnitt jedoch nicht eingehen, sondern auf einen anderen Grund: Die Störfelder der Brennstoffzellen überlagern sich und führen dazu, dass im inversen Problem die Zuordnung schwierig wird. Daher ist es wichtig, zu wissen, bei welchem Zellenabstand das Störfeld der einen Zelle das der anderen noch wesentlich beeinflusst. Zu diesem Zweck bezeichnen wir in diesem Abschnitt die S-Matrix  $\mathcal{S}$  mit  $\mathcal{S}^{(1)}$ , wenn Störungen nur an der MEA einer Zelle auftauchen und mit  $\mathcal{S}^{(2)}$ , wenn Störungen an 2 MEAs auftauchen. Ebenso mit  $\kappa^{(1)}$  und  $s_i^{(1)}$  Kondition und Singulärwerte der Matrix  $\mathcal{S}^{(1)}$ , mit  $\kappa^{(2)}$  und  $s_i^{(2)}$  Kondition und Singulärwerte der Matrix  $\mathcal{S}^{(2)}$ .

Wenn die beiden MEAs, an denen Störungen auftreten können, beliebig dicht beieinander liegen, dann addieren sich einfach die beiden Störmagnetfelder. Dies bedeutet

$$\mathcal{S}^{(2)} = \left( \mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(1)} \right), \text{ Abstand der beiden gestörten Zellen} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Daraus folgt, dass es jetzt  $2N_{G_C}$  Singulärwerte gibt, von denen  $N_{G_C}$  Singulärwerte verschwinden. Der Rest entspricht denen von  $\mathcal{S}^{(1)}$  multipliziert mit  $\sqrt{2}$ . Daraus folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^{(1)}}{\kappa^{(2)}} &\rightarrow 0, \text{ Abstand der beiden gestörten Zellen} \rightarrow 0 \\ \frac{s_1^{(2)}}{s_1^{(1)}} &\rightarrow \sqrt{2}, \text{ Abstand der beiden gestörten Zellen} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wenn die beiden gestörten MEAs dagegen weit entfernt voneinander sind, tritt keine Überlagerung der Störfelder auf, und die Sachlage ist so, als ob man es jeweils mit der Störung nur einer Zelle zu tun hätte. Man erhält also

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^{(1)}}{\kappa^{(2)}} &\rightarrow 1, \text{ Abstand zweier gestörter Zellen groß} \\ \frac{s_1^{(2)}}{s_1^{(1)}} &\rightarrow 1, \text{ Abstand zweier gestörter Zellen groß} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sei  $m-2$  die Anzahl der Zellen zwischen den beiden gestörten Zellen. Wir sagen,  $m^*$  Zellen bilden einen Cluster korrelierter Zellen.

Eine Aussage darüber, wann diese Korrelation einsetzt, gewinnen wir aus folgender Überlegung: Nach allgemeinen Gesichtspunkten variiert am langsamsten der Singulärvektor<sup>1</sup> des 1. Singulärwertes, so dass, wenn man mit großen  $m$  beginnt, die beiden ersten Singulärwerte entartet sind. D.h. jede Linearkombination der beiden Singulärvektoren ist wieder ein Singulärvektor mit gleichem Singulärwert. Mit abnehmendem  $m$  gibt es a) Linearkombinationen mit konstruktiver Interferenz, bei diesen wächst der Singulärwert an, und b) solche mit destruktiver Interferenz, bei diesen strebt der Singulärwert schnell gegen 0. Effekt a) kann durch die folgende Funktion erfasst werden:

$$f_{s_1}(x = 1/m) = \left(s_1^{(2)}/s_1^{(1)}\right)^2 - 1 \quad (3.9)$$

Nach dem oben gesagten, zeigt diese Funktion das folgende Grenzverhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_{s_1}(x = 1/m) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f_{s_1}(x = 1/m) &= 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Effekt b) kann durch die folgende Funktion erfasst werden:

$$f_{\kappa 12}(x = 1/m) = \left(\kappa^{(1)}/\kappa^{(2)}\right) \quad (3.11)$$

Nach dem oben gesagten, zeigt diese Funktion das folgende Grenzverhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_{\kappa 12}(x = 1/m) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f_{\kappa 12}(x = 1/m) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Beim Übergang von kleinen  $x$  zu Werten  $x \rightarrow 1$  kehren sich also die Verhältnisse um: Während  $f_{\kappa 12}$  von 1 nach 0 geht, geht  $f_{s_1}$  von 0 nach 1. Dies ergibt ein natürliches Kriterium, wo die Korrelationen wichtig werden, nämlich bei

$$f_{\kappa 12}(x^*) = f_{s_1}(x^*) \text{ mit } m^* = 1/x^* \quad (3.13)$$

Es ist zu betonen, dass für Brennstoffzellen  $m^* = 1$  gilt, aber dass für Brennstoffzellenstacks  $m^*$  keine Materialkonstante ist, vielmehr davon abhängt, in welcher Entfernung vom Stack gemessen wird. Besteht z.B. der Stack aus 51 Zellen, dann ist in weiterer Entfernung

---

<sup>1</sup>Die Singulärvektoren können bestimmt werden aus einem Variationsprinzip mit  $i-1$  Nebenbedingungen für den  $i$ . Singulärvektor: Er muß orthogonal sein zu allen  $i-1$  vorhergehenden Singulärvektoren. Es ist eine naheliegende Folgerung, dass immer stärkere Variationen erforderlich sind, je größer  $i$  ist.

$m^* = 51$ , in sehr geringer Entfernung dagegen mag  $m^* = 5$  erzielbar sein.

### 3.4 Bedeutung der Singulärwerte für die Genauigkeitsanforderungen an die Messgeräte

Ein Kernstück der Ergebnisse liegt in der Möglichkeit, daraus Genauigkeitsanforderungen an die Magnetfeldmessgeräte zu erhalten. Wie man dazu kommt, wird jetzt gezeigt. Um zusätzliche Indizes und Fallunterscheidungen zu vermeiden, beschränken wir uns jedoch auf den Fall, dass nur an einer Zelle im Stack eine Störung auftritt und die Position dieser Zelle bekannt ist. Der allgemeine Fall lässt sich daraus ohne größere Schwierigkeit herleiten.

Auskunft über Genauigkeitsanforderungen sind in der Beziehung (3.4)

$$d\check{H} = \mathcal{S} d\alpha, \quad \mathcal{S} = \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{U}_c.$$

enthalten, die im Abschnitt 3.2 hergeleitet wurde. Diese Beziehung ist wegen der unanschaulichen  $d\alpha$ , die die Stromdichten festlegen, etwas unhandlich. Statt der  $d\alpha$  möchte man gern Entwicklungskoeffizienten für die Stromdichte auf der MEA haben, d.h. bilden  $\{q_{ni}\}$  eine Basis der Normalkomponenten der Stromdichten auf der MEA-Oberflächen mit

$$\int_{MEA} q_{ni} q_{nj} ds = \delta_{ij} \quad (3.14)$$

dann sind die Entwicklungskoeffizienten  $d\beta_i$  gesucht für die Normalkomponenten der Stromdichteänderungen auf der MEA,  $dj_n$  mit

$$dj_n = \sum_i q_{ni} d\beta_i \quad (3.15)$$

Nach Konstruktion muss es eine invertierbare Transformationsmatrix  $\mathcal{R}$  geben mit

$$d\beta = \mathcal{R} d\alpha \quad (3.16)$$

Dann können wir statt Gl.(3.4) schreiben

$$\begin{aligned} d\check{H} &= \mathcal{S}_O d\beta, \\ \mathcal{S}_O &= \mathcal{S} \mathcal{R}^{-1} \\ \mathcal{S} &= \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{U}_c \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hier und in den folgenden Abschnitten wird fast stets die Matrix  $\mathcal{S}_O$  benutzt werden, insbesondere beziehen sich alle numerisch berechneten Singulärwerte auf die Matrix  $\mathcal{S}_O$ . Anzumerken ist, dass  $d\beta$  die Dimension eines Magnetfeldes hat, die Matrix  $\mathcal{S}_O$  also dimen-

sionslos ist.

Die Genauigkeitsanforderungen und auch Ihre Herleitungen sind verschieden, je nachdem, ob es sich bei den Fehlern um *systematische* oder *zufällige* Fehler handelt.

### 3.4.1 Genauigkeitsanforderungen bei systematischen Fehlern

Anforderungen bei systematischen Fehlern von Messungen sind die wichtigeren, denn i) ist es oft nicht leicht möglich zu entscheiden, ob ein Fehler wirklich zufällig ist, ii) sind die Anforderungen von der gleichen Größenordnung oder strenger als die bei zufälligen Fehlern und schließen diese daher ein.

Es sei  $s_{min}$  der kleinste und  $s_{max}$  der größte Singulärwert von  $\mathcal{S}_O$ , wobei  $s_{min}$  Auskunft über die minimale und  $s_{max}$  über die maximale Magnetfeldvariation gibt. Es seien ferner  $\delta\beta_i$  die Koeffizienten der fehlerhaft bestimmten Stromdichteänderung auf der MEA. Dann gilt die folgende Abschätzung für die Fortpflanzung des Meßfehlers:

$$|\delta\check{H}| = |\mathcal{S}_O\delta\beta| \geq s_{min}|\delta\beta| \quad (3.18)$$

Am Arbeitspunkt habe die Stromdichte den Wert  $\beta_A$ . Dann ist die maximal zu erwartende Störung von der Größenordnung  $-\beta_A$ . Das hat für Brennstoffzelle und Brennstoffzellenstack ungleiche Konsequenzen.

- a) Brennstoffzelle: Hier muß das Magnetfeld  $H_{max}$  der maximal zu erwartenden Störung von der Größenordnung des Magnetfeldes am Arbeitspunkt<sup>2</sup> sein.
- b) Brennstoffzellenstack: Hier ist das Magnetfeld  $H_{max}$  der maximal zu erwartenden Störung an einer Zelle nur ein Bruchteil des Magnetfeldes am Arbeitspunkt. Dieser Tatsache kann Rechnung getragen werden durch die im letzten Abschnitt eingeführte Zahl  $m^*$ , die die Anzahl der korrelierten Zellen angibt.

Da es nur um Größenordnungen geht, kann man die lineare Näherung für die Auswirkung der maximalen Störung des Stroms auf das Magnetfeld benutzen. Dann erhält man mit Gl.(3.18)

$$|\check{H}_{max}| \approx |\mathcal{S}_O \cdot \beta| \leq s_{max}|\beta| \quad (3.19)$$

woraus

$$\frac{|\delta\check{H}|}{|\check{H}_{max}|} \cdot \frac{s_{max}}{s_{min}} \geq \frac{|\delta\beta|}{|\beta|}, \quad (3.20)$$

resultiert. Bei Vorgabe der relativen Genauigkeit  $P_{me}$  ist, wenn  $H_{total}$  das gesamte Mag-

---

<sup>2</sup>Auf die genannte Weise wird das von der Brennstoffzelle selbst erzeugte Magnetfeld abgeschätzt. Das ist allerdings nicht das gesamte Magnetfeld. Insbesondere das Magnetfeld der Zuleitungen ist darin nicht enthalten. Dies dominiert natürlich bei Meßstellen in unmittelbarer Nähe der Zuleitungen, jedenfalls für eine Richtung, aber im Durchschnitt dominiert es keineswegs, sondern hat bestenfalls die gleiche Größenordnung, so dass die gewählte Abschätzung realistisch ist.

netfeld ist

$$\frac{|\delta H_i|}{|H_{i,total}|} \approx P_{me} \text{ (Größenordnung unabhängig von } i \text{ )} \quad (3.21)$$

Das bedeutet

$$\frac{|\delta H_i|}{|H_{i,max}|} \approx P_{me} \cdot m^* \text{ (Größenordnung unabhängig von } i \text{ )} \quad (3.22)$$

woraus folgt

$$\frac{|\delta \check{H}|}{|\check{H}_{max}|} \approx P_{me} \cdot m^* \quad (3.23)$$

Wir verlangen, dass  $|\delta\beta| \leq 1/3|\beta|$  gilt, woraus sich die *relative* Präzisionsanforderung  $P_{me}$  an die Messgeräte durch

$$\begin{aligned} P_{me} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{m^* \kappa}, \text{ bei Fehlern, die systematisch sein können} \\ \kappa &= \frac{s_{max}}{s_{min}}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ergibt.

Typische Magnetfeldänderungen sind 20% von der Größe des Erdmagnetfeldes. Daraus folgt für die absolute Präzisionsanforderung an die Messgeräte:

$$|\delta B| = 10^{-5} \times P_{me} [Tesla], \text{ bei Fehlern, die systematisch sein können} \quad (3.25)$$

Dass es sich bei den Abschätzungen um solche handelt, bei denen von systematischen Fehlern ausgegangen wird, erkennt man schon daran, dass sie nicht von der Anzahl der Messungen abhängen.

### 3.4.2 Genauigkeitsanforderungen bei zufälligen Fehlern

Wir gehen aus von Gl.(3.18) und entwickeln den Fehler  $\delta \check{H}$  nach den Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_i$  der Matrix  $\mathcal{U}$ , sowie den Fehler  $\delta\beta$  nach den Spaltenvektoren  $\mathbf{v}_i$  der Matrix  $\mathcal{V}$ , die sich beide aus der Singulärwertzerlegung von  $\mathcal{S}_O$

$$\mathcal{S}_O = \mathcal{U} \mathcal{W} \mathcal{V}^T \quad (3.26)$$

ergeben und erhalten

$$\begin{aligned}\delta\check{H} &= \sum_{i=1}^{N_{G_C}} \delta\gamma_i \mathbf{u}_i \\ \delta\beta &= \sum_{i=1}^{N_{G_C}} \delta\beta_i \mathbf{v}_i\end{aligned}\tag{3.27}$$

und daraus

$$\delta\gamma_i = s_i \delta\beta_i\tag{3.28}$$

wobei  $s_i$  der  $i$ . Singulärwert der Matrix  $\mathcal{W}$  ist. Wir definieren als mittlere Abweichung

$$\begin{aligned}\overline{|\delta\gamma_i|} &= \sqrt{\frac{1}{N_{G_C}} \sum_{l=1}^{N_{G_C}} \delta\gamma_l^2} \\ \overline{|\delta\beta_i|} &= \sqrt{\frac{1}{N_{G_C}} \sum_{l=1}^{N_{G_C}} \delta\beta_l^2} \\ \overline{|\delta H_k|} &= \sqrt{\frac{1}{3N_H} \sum_{k=1}^{3N_H} \delta H_k^2}\end{aligned}\tag{3.29}$$

und erhalten zunächst

$$\overline{|\delta\gamma_l|} \geq s_{min} \overline{|\delta\beta_l|}\tag{3.30}$$

Ferner sind die Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_i$  orthonormal zueinander, was bedeutet, dass sie mit den einfachen Messpunktkomponenten über eine *unitäre Transformation* verknüpft sind. Daraus folgt bei einem *zufälligen*<sup>3</sup> Fehler<sup>4</sup> die aus der Definition für die Mittelwerte sich ergebende wichtige Beziehung

$$\overline{|\delta\gamma_l|} = \overline{|\delta H_k|}\tag{3.31}$$

Hieraus ergibt sich die zu fordernde absolute Genauigkeit bei zufälligen Fehlern:

$$\overline{|\delta H_k|} \geq s_{min} \cdot \overline{|\delta\beta_l|}\tag{3.32}$$

---

<sup>3</sup>Angenommen wird, dass der Fehler in jeder Komponente  $H_k$  in gleicher Weise auftritt.

<sup>4</sup>Ein Fehler ist nur dann als zufällig anzusprechen, falls keine Korrelation zwischen Fehlern aufeinander folgender Messungen vorliegt. Es ist oft nicht so einfach, zu entscheiden, ob das zutrifft. Z.B. können die gegenwärtig beim Versuch eingesetzten Messgeräte bei örtlich verschobenen Messpunkten etwa jede Sekunde das Magnetfeld messen, aber am gleichen Ort 100 mal pro Sekunde. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass im letzteren Fall Korrelationen vorhanden sind, trivialer Weise zumindest dann, wenn die Fehler in der Ortsbestimmung nicht vernachlässigbar sind.

Da es sich um *zufällige* Fehler handelt, gilt Gl.(3.32) auch für die Entwicklungskoeffizienten jeder anderen orthonormierten Basis, die aus  $\{\mathbf{v}_i\}$  durch unitäre Transformation hervorgeht, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} |\overline{\delta B_k}| &\approx \mu_0 \cdot s_{min} \cdot |\overline{\delta \beta_l}|, \beta_l \text{ Koeffizienten eines Orthonormalsystems,} \\ &\text{das aus } \{\mathbf{v}_i\} \text{ durch unitäre Transformation hervorgeht} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zu bestimmen ist jetzt noch  $|\overline{\delta \beta_l}|$ . Die Dimension des Vektors  $d\alpha$  ist  $N_{G_C}$ . Unterteilt man die Fläche  $F$  der MEA in  $N_{G_C}$  gleiche Teile  $F_i$ , dann kann man einen Satz von orthonormalen  $p_{ni}$  erhalten durch

$$p_{ni}(r) = \sqrt{\frac{N_{G_C}}{F}} \text{ für } r \in F_i, 0 \text{ sonst} \quad (3.34)$$

Die so definierten  $p_{ni}$  hängen mit den tatsächlichen  $q_{ni}$  über eine quadratische Transformationsmatrix  $\mathcal{L}$  zusammen

$$p_n = \mathcal{L} q_n \quad (3.35)$$

$\mathcal{L}$  ist nicht unitär und hängt von der Art ab, wie die  $\{q_n\}$  definiert sind. Da aber die  $q_n$  wegen der großflächigen Änderung der Leitfähigkeiten  $\sigma$  auch keine bessere Auflösung als die  $p_n$  haben können und beide Orthonormalsysteme auf der MEA-Fläche sind, darf man annehmen, dass die Matrix  $\mathcal{L}$  genügend unitär ist in dem Sinne, dass ihre Eigenwerte von der Größenordnung 1 sind. Dieser Sachverhalt genügt für Abschätzungen. Damit ergibt sich die Größenordnung der  $\delta \beta_l$  aus der Größenordnung der Entwicklungskoeffizienten  $\delta \beta'_l$  der  $p_n$ . Und für diese gilt nun die folgende Abschätzung, wenn man für die Störstromdichte, die zumindest erkannt werden muß,  $1/3$  der Stromdichte am Arbeitspunkt einsetzt:

$$|\delta j_n| = \left| \sum_l p_{nl} \delta \beta'_l \right| \approx \frac{20A}{F}, \text{ } F \text{ ist die aktive Fläche der MEA} \quad (3.36)$$

Daraus folgt

$$|\overline{\delta \beta_l}| \approx \frac{20A}{\sqrt{F \cdot N_{G_C}}} \quad (3.37)$$

Bei einer Kantenlänge der Zelle von  $15\text{cm}$  bedeutet dies für die Meßgenauigkeit

$$|\overline{\delta B_k}| \approx \frac{1}{\sqrt{N_{G_C}}} \cdot 10^{-4} \cdot s_{min}[\text{Tesla}], \text{ bei zufälligen Fehlern} \quad (3.38)$$

Die zu fordernde relative Genauigkeit bei zufälligen Fehlern ist dann für die eingesetzten Werte

$$P_{me} \approx \frac{10}{\sqrt{N_{G_C}}} \cdot s_{min}, \text{ bei zufälligen Fehlern} \quad (3.39)$$

Dass es sich bei diesen Abschätzungen um solche zufälliger Fehler handelt, kann man leicht

erkennen: Singulärwerte wachsen bei  $M$  hintereinander ausgeführten Messungen um  $\sqrt{M}$  an, hier hat das die Konsequenz, dass die Genauigkeitsanforderungen um den Faktor  $\sqrt{M}$  abnehmen<sup>5</sup>.

### 3.5 Die Messpunktreduktion

Eine Veränderung der Leitfähigkeit innerhalb des Stacks führt unmittelbar zu einer Veränderung des dazugehörigen Magnetfeldes. Daher ist es sinnvoll, die Magnetfeldmesspunkte auf die Punkte einzuschränken, an denen eine Veränderung am besten messbar ist. Aber es ist nicht auf Anhieb klar, nach welchen Kriterien diese Einschränkung erfolgen soll. Klar ist indessen, dass bei der verhältnismäßig langen Zeit, die eine Magnetfeldmessung in Anspruch nimmt, eine Messpunktreduzierung erwünscht sein muss.

Bei Nichtberücksichtigung nur einer einzelnen Magnetfeldkomponente in einem Punkt, sei es x, y oder z-Richtung, müssen trotzdem noch die restlichen Komponenten an diesem Punkt gemessen werden. Das ist also eine sinnlose Reduzierung. Damit eine tatsächliche Messpunktreduktion stattfinden kann, müssen die Zeilen der  $\mathcal{S}_O$  Matrix, die zum gleichen Messpunkt gehören, gemeinsam betrachtet und gestrichen werden. Deshalb ordnen wir die Elemente in einer bestimmten Weise: Die zu  $N_H$  Messpunkten gehörenden  $3N_H$  Zeilen der Matrix  $\mathcal{S}_O$  sind so sortiert, dass  $(\mathcal{S}_O)_{3j+i,k}$ ,  $i = 0, 1, 2$  die Zeilen für die drei Komponenten des Magnetfeldes im gleichen Punkt  $r_j$  darstellen, wobei  $r_j$  ein beliebiger Magnetfeldmesspunkt an der j-ten Stelle ist.

Als ersten Ansatz könnte man nun eine Messpunktreduktion nach dem Gesichtspunkt durchführen, Magnetfeldmesspunkte an den Stellen auszuschließen, an denen die Variation des Magnetfeldes bei Störungen nicht stark ist. Die Stärke dieser Variation kann man an den Diagonalelementen der Matrix  $\mathcal{S}_O \mathcal{S}_O^T$  ablesen. Es läge deshalb nahe, eine Funktion *zeta* zu definieren mit

$$zeta(r_j) = \sum_{i=0}^2 (\mathcal{S}_O \mathcal{S}_O^T)_{3j+i, 3j+i} \quad (3.40)$$

und nach Höhe ihres Wertes an der Stelle  $r_j$  zu entscheiden, ob ein Punkt bei der Messung berücksichtigt werden sollte oder nicht.

Dieser Ansatz enthält indessen eine deutliche Schwäche, was man sieht, wenn man die Singulärwertzerlegung von  $\mathcal{S}_O$  durchführt (vgl. Gl.(3.26)) und einsetzt:

$$zeta(r_j) = \sum_{i=0}^2 (\mathcal{U} \mathcal{W}^2 \mathcal{U}^T)_{3j+i, 3j+i} \quad (3.41)$$

Aus dieser Darstellung ist klar, dass diejenigen Spaltenvektoren  $u_i$  der orthogonalen Matrix  $\mathcal{U}$ , die zu Singulärwerten mit kleinem Index gehören, massiv bevorzugt werden. Dabei sind

---

<sup>5</sup>Kapitel 3.3 und 3.4 wurden in Zusammenarbeit mit S. Both, J. Hirschfeld, H. Lustfeld, M. Reißel und B. Steffen erstellt.



die  $u_i$  mit *großem* Index diejenigen mit hoher Auflösung. Darum wird die Funktion, die jedem Messpunkt ein Gewicht zuordnet, folgendermaßen definiert

**Definition 3.5.1**

*Mit den oben gemachten Voraussetzungen sei die Funktion*

$$\zeta : \mathbb{R}^3 \ni r \longrightarrow \zeta(r) \in \mathbb{R}$$

*definiert durch*

$$\zeta(r_j) := \frac{N_H}{\eta} \sum_{i=0}^2 (\mathcal{U} \mathcal{W}^\alpha \mathcal{U}^T)_{3j+i, 3j+i}$$

*mit  $\eta = \sum_i \mathcal{W}_{i,i}^\alpha$ , der Summe der mit  $\alpha$  potenzierten Singulärwerte*

Es hat sich herausgestellt[5], dass dieses Kriterium für  $\alpha = 0$  sehr gute Resultate liefert und nur dieser Wert wird in der vorliegenden Arbeit betrachtet<sup>6</sup>.

Bei Gewichtung aller Punkte mit der  $\zeta$  Funktion ist es möglich, mit einem erheblich geringeren Anteil von Magnetfeldmesspunkten auszukommen.

Man beachte hierbei, dass jeder Magnetfeldmesspunkt einen Informationsanteil und einen Fehleranteil mit sich bringt. Wenn nun die Punkte mit einem ungenügenden Informationsanteil entfernt werden, resultiert ein erfreulicher Effekt: die Kondition wird verbessert. Es ist also so, - wie man vielleicht intuitiv nicht annehmen würde -, a) Hinzunahme von Messpunkten, an denen mit gleicher Sorgfalt gemessen wird, kann das Ergebnis verschlechtern, b) das Weglassen von Messpunkten kann das Ergebnis verbessern, auch wenn an diesen Messpunkten sehr sorgfältig gemessen wurde.

---

<sup>6</sup>Die  $\zeta$  Funktion sollte invariant gegenüber unitären Transformationen auf der Seite der Stromkomponenten sein. Dies ist in der Tat der Fall, wovon man sich leicht überzeugen kann.

# Kapitel 4

## Implementierung

Zur Lösung der beschriebenen Problemstellung, also zur Berechnung des Magnetfeldes in der unmittelbaren Umgebung eines DMFC-Stacks, für eine anschließende Rekonstruktion der Stromdichteverteilungen innerhalb des Stack (insbesondere in den MEAs), wurde ein Programm in Matlab<sup>1</sup> implementiert. Bevor man zum eigentlichen Programmablauf kommt, muss zunächst der DMFC-Stack mit allen Eigenschaften und Nebenbedingungen ausmodelliert werden, welches einen wichtigen Teil der Implementierung darstellt. Deswegen wird auf diesen Prozess im folgenden Abschnitt separat eingegangen. Wie diese Modellierung im Detail realisiert wird, kann aus [7] entnommen werden. Im Anschluss zur Modellierung werden die wesentlichen Programmkomponenten beschrieben.

### 4.1 Modellierung

Das Programm ist so strukturiert, dass vor dem Aufruf der Hauptroutinen die Datenstruktur **g** mit allen erforderlichen Daten des Brennstoffzellenstacks, wie Dimensionen, Materialschichten oder Leitfähigkeiten der Schichten, besetzt wird. Dies geschieht in einer separaten Routine, die je nach Ausgangssituation angepasst und verändert werden muss. Die Hauptroutinen hingegen werden nicht angepasst und sind in der Lage beliebige Variationen des Stackaufbaus zu bearbeiten, also z.B. deren Stromdichteverteilung oder das entstehende Magnetfeld zu berechnen. Die Datenstruktur **g** wird im Laufe des gesamten Programms mit den berechneten Daten erweitert, sodass bei Programmende mit unterschiedlichen Plot-Routinen alle Ergebnisse visualisiert werden können.

Somit wird also vor dem eigentlichen Programmablauf eine Vorbereitungs-Routine gestartet, die die erforderlichen Informationen für die weiteren Berechnungen aufbereitet und der Datenstruktur **g** zuweist. Es werden die Abmessungen des Stack, die Anordnung bzw. Leitfähigkeiten der unterschiedlichen Materialschichten sowie die Gittereinteilung festgelegt. Zur Reduktion des Rechenaufwandes werden an dieser Stelle bestimmte Schichten des

---

<sup>1</sup>**Matlab** ist eine kommerzielle Software des Unternehmens *The MathWorks*, Inc. zur Lösung mathematischer Probleme und zur grafischen Darstellung der Ergebnisse.

Stacks zusammengefasst, um unnötige Gitterpunkte, die zur einer Erhöhung der Genauigkeit nichts beitragen, zu eliminieren. Die Leitfähigkeit dieser zusammengefassten Schichten werden den physikalischen Gesetzen entsprechend gemittelt und den Bereichen zugewiesen [7]. Die Leitfähigkeiten der unterschiedlichen Materialien wurden dabei auf die folgenden Werte gesetzt.

Stahl	=	$1 \cdot 10^6$	$\frac{S}{m}$
Grafit	=	4000	$\frac{S}{m}$
MEA	=	3.33	$\frac{S}{m}$
Aluminium	=	$37 \cdot 10^6$	$\frac{S}{m}$

Die folgende Grafik veranschaulicht einen Fall, bei der 5 Brennstoffzellen ausmodelliert sind. Der Stack wurde in Längsrichtung (y-Richtung) mit einem Faktor von 2 skaliert, damit die dünnen Schichten in der Mitte des Stacks besser zu erkennen sind. Die Farbskala weist dabei jeder Farbe im Bild die entsprechende Leitfähigkeit zu. Es sei noch angemerkt, dass die Leitfähigkeit der homogenisierten Schichten in y-Richtung in der Grafik nicht zu sehen ist, da diese sich im Stackinneren befindet.

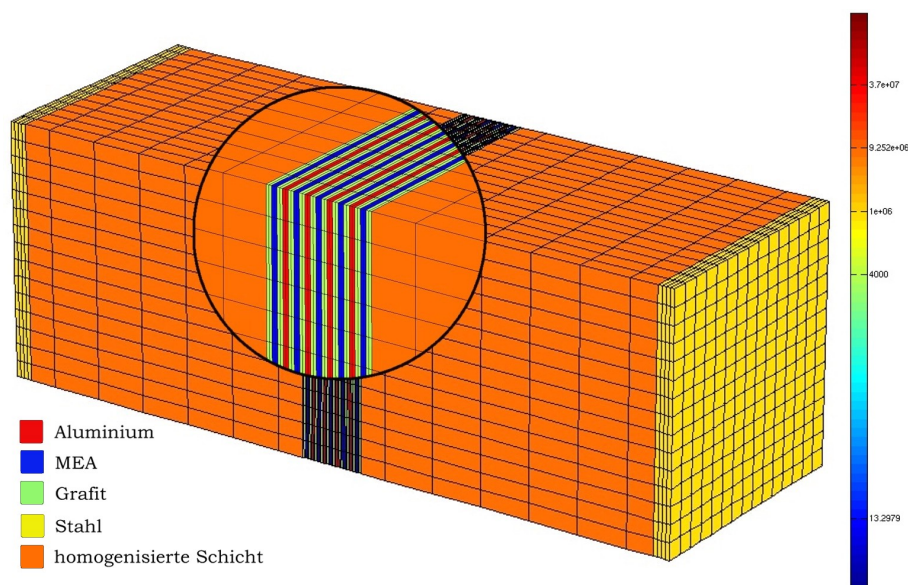


Abbildung 4.1: Modell eines Brennstoffzellenstacks mit 5 ausmodellierten Zellen und eingebauten Aluminiumplatten, Einheit  $\frac{S}{m}$

Zusätzlich zu dieser Modellierung wird in der Vorbereitungsroutine das Randwertproblem zur direkten Berechnung der Stromdichten innerhalb des gesamten Stacks initialisiert, so dass alle benötigten Datenstrukturen zur Lösung dieses Randwertproblems wie z.B. die Gradientenmatrix  $G$  oder die Divergenzmatrix  $D$ , generiert und gespeichert werden. Neben weiteren Berechnungen, die alle geometrischen Eigenschaften des Stacks beschreiben,

wird auch die Positionierung der Magnetfeldmesspunkte um den Brennstoffzellenstack herum festgelegt. Zuletzt werden die MEAs des Stacks markiert, die in den Simulationsberechnungen nach Inhomogenitäten untersucht werden sollen. Es werden also die Leitfähigkeitskomponenten markiert, nach denen die Stromdichte  $j$  in der Hauptroutine abgeleitet werden soll. Diese Information ist für den nachfolgenden Programmablauf besonders wichtig.

## 4.2 Programmaufbau

Im Grunde sind zur Lösung der Problemstellung 5 Matlab-Funktionen programmiert worden, die folgende Werte liefern

<code>get_j(g)</code>	Stromdichte $j$ , Potential $u$ und Strom $i$
<code>get_dj(g)</code>	Ableitungen $\frac{dj}{d\sigma}$ und $\frac{di}{d\sigma}$ nach den MEA-Leitfähigkeiten
<code>get_h(g)</code>	Magnetfeld $H$ zu $j$
<code>get_dh(g)</code>	Ableitung des Magnetfeldes $\frac{dH}{dj}$
<code>orthomea(g)</code>	Orthonormalisierung in den MEAs

Optional kann mit `get_z(g)` die Messpunktreduktion mit der Methode der  $\zeta$  - Funktion [5] durchgeführt werden. Im Anschluss zu den Berechnungen gibt es die Möglichkeit mit speziell für die unterschiedlichen Datenstrukturen programmierten Grafik-Routinen die Ergebnisse zu visualisieren.

### 4.2.1 Bestimmung der Stromdichteverteilung $j$

In der `get_j(g)` Funktion wird das Vorwärtsproblem gelöst und somit für das gesamte Berechnungsgitter innerhalb des Brennstoffzellenstacks das Potential  $u$ , die Stromverteilung  $i$  und die Stromdichteverteilung  $j$  berechnet und der Struktur  $g$  zugewiesen. Dafür wird folgendes Randwertproblem betrachtet:

$$\begin{aligned} j &= -\sigma \cdot \text{grad}(u) \\ \text{div}(j) &= 0 && \text{in } \Omega \\ \nu \cdot j &= \nu \cdot j_0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die diskreten Datenstrukturen wie die Divergenzmatrix  $D$ , die Gradientenmatrix  $G$  oder die Matrix der diskreten Leitfähigkeiten  $S$  für die diskrete Lösung dieses Problems wurden bereits in der Vorbereitungsroutine generiert und in der globalen Datenstruktur  $g$  abgespeichert [7]. Die diskrete Form des Randwertproblems sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} j &= -SGu + j_0 \\ Dj &= 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

wobei die Randbedingung  $j_0$  überall bis auf die Stromein- und Stromausleitungspunkte mit 0 vorbesetzt ist. Es folgt

$$-DSGu = -Dj_0$$

Aufgrund der Neumann-Bedingung auf  $\partial\Omega$  ist die Matrix  $DSG$  jedoch singulär, weshalb mit  $u(x_e) = 0$  geerdet werden muss

$$u = Eu_e, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$$

sodass wir für  $u_e$  das folgende symmetrisch positiv definite System erhalten

$$-E^T DSGEu_e = -E^T Dj_0 \quad (4.1)$$

Nun wird zunächst die Lösung  $u_e$  ohne Erdung für das obige Gleichungssystem (4.1) gelöst und anschließend mit  $u = Eu_e$  die geerdete Lösung auf  $\mathbf{u}$  gespeichert. Mit den Programmbefehlen

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\mathbf{S} \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{j}_0; \\ \mathbf{i} &= \mathbf{A} \mathbf{j} \mathbf{j}; \end{aligned}$$

wird die diskrete Stromdichteverteilung  $\mathbf{j}$  und Stromverteilung  $\mathbf{i}$  ermittelt, wobei die Matrix  $\mathbf{A} \mathbf{j}$  mit den zu den Stromdichten gehörenden Flächen vorbelegt ist.

#### 4.2.2 Bestimmung der Ableitung $\frac{dj}{d\sigma}$

Mit der Routine `get_dj(g)` werden die Ableitungen der soeben ermittelten Stromdichteverteilung  $j$  nach den entsprechenden Leitfähigkeitsparametern berechnet. Da in unserem Falle die Veränderungen der Stromdichte in Abhängigkeit zu der Leitfähigkeit  $\sigma$  für begrenzte Bereiche des Stacks, den MEAs, von Interesse ist, muss es eine Information geben, die eine Unterscheidung von Leitfähigkeitsparametern in den MEAs mit denen vom Rest des Stacks ermöglicht. Es müssen die zu untersuchenden MEAs sozusagen markiert sein.

Dieser Vorgang ist ebenfalls in der Vorbereitungsroutine durchgeführt und mittels entsprechenden Markierungen  $1, 2, \dots, n_{\text{MEA}}$  auf dem Integer-Feld `tsy` [7] festgehalten worden. In  $n_{\text{MEA}}$  ist die Anzahl der zu untersuchenden MEAs enthalten, sodass alle  $\sigma$ -Komponenten, die zu der selben MEA gehören, die gleiche Ziffer als Markierung erhalten. Für die restlichen Bereiche des Stacks ist die Matrix `tsy` mit Nullen vorbelegt.

In der Routine `get_dj(g)` werden nun zunächst diese  $\sigma$ -Komponenten bestimmt, nach denen  $j(\sigma)$  in Richtung  $\tau$  abgeleitet werden soll. Die Gleichung für diese Ableitung sieht dabei folgendermaßen aus.

$$-E^T DSGE \frac{du_e}{d\sigma}(\tau) = E^T D\tau Gu(\sigma) \quad (4.2)$$

Genauere Informationen dazu sind in [4] nachzulesen. Es ist sichtbar, dass die linke Seite des Gleichungssystems sich von der in (4.1) nicht unterscheidet. Es bleibt die rechte Seite zu berechnen, wobei  $\tau$  eine dünne Diagonalmatrix mit 1-Einträgen in den Positionen, wo eine Markierung  $> 0$  vorzufinden ist, darstellt.

Zur Lösung des Gleichungssystems wird dessen rechte Seite mit  $b_\tau = E^T D\tau Gu(\sigma)$  (4.2) bestimmt. Analog zu der Berechnung der Stromdichte  $j$  im letzten Kapitel, wird hier auch zunächst die Lösung  $\frac{du_e}{d\sigma}$  ohne Erdungspunkt ermittelt, und anschließend mit der Multiplikation der Erdungsmatrix  $E$  die Ableitung des Potentials  $\frac{du}{d\sigma}$  berechnet.

$$\frac{du}{d\sigma}(\tau) = E \frac{du_e}{d\sigma}(\tau)$$

Daraufhin wird mit der Vorschrift

$$\frac{dj}{d\sigma}(\tau) = -\tau Gu(\sigma) - SG \frac{du}{d\sigma}(\tau)$$

die endgültige Ableitung der Stromdichte, sowie durch die Multiplikation von  $\frac{dj}{d\sigma}$  mit den zugehörigen Flächen  $A_j$  die Ableitung der Ströme  $\frac{di}{d\sigma}$  ermittelt. Abschließend wird mit Hilfe einer vordefinierten Matlab-Funktion `svd()`

$$\begin{aligned} [\mathbf{Uj}, \mathbf{Sj}, \mathbf{Vj}] &= \text{svd}(\mathbf{dj}, 0); \\ \mathbf{swj} &= \text{diag}(\mathbf{Sj}); \end{aligned}$$

die Singulärwertzerlegung von  $\frac{dj}{d\sigma}$  durchgeführt und die in  $\mathbf{Sj}$  enthaltenen Singulärwerte in Form eines Vektors auf `swj` gespeichert. Dabei beinhaltet die orthogonale Matrix  $\mathbf{Uj}$  die Stromdichtebasen zu den markierten MEAs. Zur Ermittlung der Ableitung des Magnetfeldes  $\frac{d\vec{H}}{dj}$  spielt diese Matrix  $\mathbf{Uj}$  die zentrale Rolle.

#### 4.2.2.1 Entkopplung des Parametergitters

Optional zu `get_dj()` kann die Funktion `get_dj_res()` aufgerufen werden, die bei der Berechnung der Ableitung  $\frac{dj}{d\sigma}$  das Parametergitter der untersuchten MEAs von dem restlichen Berechnungsgitter in Querschnittsrichtung des Brennstoffzellenstacks entkoppelt. Auf diese Weise kann die Auflösung der Diskretisierung des gesamten Berechnungsgitters beliebig erhöht werden, ohne die Auflösung innerhalb der untersuchten MEAs verfeinern zu müssen, sodass der Rechenaufwand insbesondere bei der Berechnung von  $\frac{dj}{d\sigma}$  erheblich verringert wird. Da die Auflösung der rekonstruierten Stromdichteverteilung innerhalb der MEA ohnehin durch die Genauigkeit der Messgeräte limitiert ist, ist an dieser Stelle eine beliebige Verfeinerung des Gitters nicht sinnvoll. Nun bietet es sich an, die Auflösung des restlichen Berechnungsgitters zu erhöhen, um die numerischen Approximationsfehler zu minimieren. Innerhalb des Berechnungsgitters wird ein diskretes Randwertproblem gelöst, welches insbesondere das Berechnen von Ableitungen beinhaltet. Dementsprechend sind die Anforderungen bezüglich der Glattheit höher, sodass eine Verfeinerung des Berechnungsgitters durchaus sinnvoll ist und vertrauenswürdiger Ergebnisse mit sich bringt.

Mittels dieser Funktion ist es möglich, drei unterschiedliche Auflösungen von  $5cm \times 5cm$ ,  $3cm \times 3cm$  und  $1cm \times 1cm$  für das Parametergitter auszuwählen. Bei einer Querschnittsfläche des Stacks von  $15cm \times 15cm$  führen diese vordefinierten Auflösungen in den zu untersuchenden MEAs zu Gittern mit  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  und  $15 \times 15$  Einteilungen. Es muss bei der Auswahl der Gitterauflösung des Parametergitters und des restlichen Berechnungsgitters darauf geachtet werden, dass das grobe Parametergitter genau auf den Gitterpunkten des feineren Berechnungsgitters liegt.

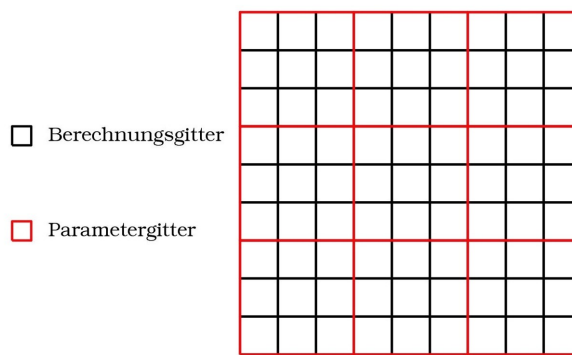


Abbildung 4.2: Entkopplung des Parametergitters ( $3 \times 3$ ) vom Berechnungsgitter ( $9 \times 9$ )

Mit dieser Voraussetzung ist sichergestellt, dass bei der Transformation der Werte des groben Gitters auf das feine Gitter die jeweiligen Werte eindeutig zugeordnet werden können. Im Gegensatz zu der Berechnung von  $\frac{dj}{d\sigma}$  ohne entkoppeltem Parametergitter, muss in dieser Funktion zur Transformation der Werte für jede markierte MEA eine

Transformationsmatrix  $A_{t_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{MEA}}$  generiert werden. Dies geschieht in einer Schleife, wo die Transformationsmatrix  $A_{t_i}$  mit dem aktuellen  $\tau_i Gu(\sigma)$  multipliziert wird, sodass am Ende das folgende Gleichungssystem gelöst wird.

$$-E^T DSGE \frac{du_e}{d\sigma}(\tau) = E^T D A_t \tau Gu(\sigma) \quad (4.3)$$

Diese Gleichung ist analog zu der Gleichung (4.2), mit dem Unterschied der Transfermatrix  $A_t$ , die sich aus den Matrizen  $A_{t_i}$  zusammensetzt. Für die Generierung der Transformationsmatrix  $A_{t_i}$  der  $i$ -ten MEA wird jedes mal eine separate Hilfsfunktion aufgerufen, die als Eingabeparameter Felder der  $x$ - und  $y$ -Komponenten für das aktuelle grobe Gitter  $(x_g, y_g)$  und feine Gitter  $(x_f, y_f)$  enthalten. Man beachte hierbei, dass für die MEAs des gleichen Stacks nur die gleiche Gittereinteilung gewählt werden kann. Bei der Erstellung von  $A_{t_i}$  wird prinzipiell das *Nearest Neighbour - Verfahren* angewendet, bei der zunächst die minimalen Abstände zwischen den Koordinaten des groben Gitters  $(x_g, y_g)$  und die des feinen Gitters  $(x_f, y_f)$  folgendermaßen bestimmt und deren Indizes festgehalten werden.

$$\begin{aligned} d &= (x_f - x_g).^2 + (y_f - y_g).^2; \\ [h, k] &= \min(d'); \end{aligned}$$

Nach diesen Befehlen sind auf dem Feld  $k$  die Indizes enthalten, die die Werte des groben Gitters auf das feine Gitter zuordnet. Mit dieser Information wird nun endgültig die dünne Matrix  $A_{t_i}$  der Dimension  $n_f \times n_g$  erstellt, wobei  $n_f$  die Anzahl der Elemente des feinen und  $n_g$  die des groben Gitters darstellt.

### 4.2.3 Anwendung des Biot-Savart Gesetzes

Sowohl für die Berechnung des diskreten Magnetfeldes  $\check{H}$  zu der diskreten Stromdichteverteilung  $\check{j}$  im gesamten Stack als auch für die Ermittlung der Ableitung des Magnetfeldes  $\frac{d\check{H}}{d\check{j}}$  an den zu untersuchenden MEAs muss das Biot-Savart Gesetz angewendet werden. Dafür wurde die Matlab-Routine `biotI()` implementiert, die die vorherige Berechnung der Ströme im Stack bzw. der Strombasen in den zu untersuchenden MEAs voraussetzt. Die Festlegung der Koordinaten für die Magnetfeldmesspunkte ist ebenfalls erforderlich.

#### 4.2.3.1 Ermittlung des diskreten Magnetfeldes $\check{H}$

Für die Berechnung von  $\check{H}$  erfolgt der folgende Aufruf in der `get_h()`-Funktion.

$$h = \text{biotI}(i, g);$$

wobei  $i$  die Stromverteilung innerhalb des gesamten Brennstoffzellenstacks enthält. Die Biot-Savart Routine ist ein zeit- und speicherintensives Verfahren, da für jedes einzelne



Leiterstück innerhalb des Stacks eine Magnetfeldstärke für jeden einzelnen Magnetfeldmesspunkt berechnet werden muss. Bei einer Diskretisierung des Stacks in jede Richtung mit einer Gitterweite von beispielsweise  $1\text{cm}$  erhält man schon fast  $N_i = 5000$  Leiterstücke, deren Anfangspunkte in  $\mathbf{v}0$ , Endpunkte in  $\mathbf{v}1$  sowie die dazugehörigen Stromstärken in  $\mathbf{i}$  festgehalten werden. Bei einer zusätzlichen Auswahl der Magnetfeldmesspunkte um den Stack herum, deren Auflösung in x- und z-Richtung  $1\text{cm}$  und in y-Richtung  $4\text{mm}$  beträgt, erhält man nahezu  $N_H = 4000$  Punkte, was zur Folge hat, dass mit

$$N_{ges} = N_H * N_i$$

an die 20 Millionen Werte berechnet werden müssen.

Aus diesem Grunde wurde die `biotI()` Funktion so implementiert, dass zu Beginn der Berechnung eine Speicherabschätzung durchgeführt und eine entsprechende Aufteilung der Magnetfeldmesspunkte in passend große Blöcke vorgenommen wird.

Bezeichne  $N_B$  die Anzahl der Blöcke, die Matrix  $B$  den Biot-Savart Operator und die Matrix  $W$  die Stromverteilung innerhalb des gesamten Stacks, dann folgt für  $\check{H}$

$$\check{H} = B W$$

Nun wird für jeden Block pro Funktionsdurchlauf der folgende Algorithmus durchgeführt

$$H_k = B_k W, \quad k = 1, \dots, N_B$$

sodass am Ende sämtliche  $H_k$  zum gesamten diskreten Magnetfeld  $\check{H}$  zusammengefasst werden.

$$\check{H} = [H_1, \dots, H_k, \dots, H_{N_B}]$$

Diese Schritte werden für alle Achsenrichtungen (x, y, z) separat durchgeführt, sodass die Magnetfeldkomponentenmatrizen  $H_x$ ,  $H_y$  und  $H_z$  abschließend in einer Matrix zusammengefasst werden.

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_x; \mathbf{H}_y; \mathbf{H}_z];$$

#### 4.2.3.2 Berechnung der Ableitung $\frac{d\check{H}}{d\check{j}}$

Zur Berechnung der Ableitung des Magnetfeldes  $\frac{d\check{H}}{d\check{j}}$ , also der Veränderung des Magnetfeldes bei einer infinitesimalen Änderung der Stromdichte, müssen der `biotI()`-Funktion sämtliche Strombasen aus der Singulärwertzerlegung zu  $\frac{d\check{j}}{d\check{\sigma}}$  (3.2) im letzten Kapitel übergeben werden. Da es sich jedoch bei der Matrix  $U_j$  um Stromdichtebasen handelt, werden mittels einer Multiplikation mit den entsprechenden Flächen die Stromdichtebasen zu

Strombasen  $U_i$  transformiert. Dies erfolgt mit der folgenden Matrixmultiplikation.

$$U_i = A_j U_j$$

Vor dem Aufruf der Biot-Savart Routine, wird zuletzt der Abschneide-Parameter  $\varepsilon_j$  für  $U_j$  (3.3) auf  $\varepsilon_j = 1 \cdot 10^{-4}$  festgelegt und dementsprechend werden die irrelevanten Einträge aus  $U_j$  bzw.  $U_i$  eliminiert. Dies wird mit den folgenden Anweisungen verwirklicht.

```
is = max(find(swj/swj(1)>epsj));
dh = biotI(Aj Uj(:,1:is),g);
```

Wenn nun  $N_B$  Blöcke existieren und  $B$  wie zuvor den Biot-Savart Operator bezeichnet, dann folgt für  $S := \frac{d\check{H}}{d\check{j}}$

$$S = B U_i$$

Analog zu der Berechnung des diskreten Magnetfeldes  $\check{H}$  im letzten Abschnitt, wird auch hier für jeden Block der folgende Algorithmus durchgeführt.

$$S_k = B_k U_i, \quad k = 1, \dots, N_B$$

$$S = [S_1, \dots, S_k, \dots, S_{N_B}]$$

Letztlich werden die Ableitungen des Magnetfeldes gleichermaßen separiert und nach den x-, y- und z-Komponenten zusammengefasst.

$$S = [S_x; S_y; S_z];$$

Am Ende der `get_dh()` Funktion wird eine Singulärwertzerlegung durchgeführt, und die so erhaltenen Singulärwerte in `swh` festgehalten.

```
[Uh,Sh,Vh] = svd(dh,0);
swh = diag(Sh);
```

Der Verlauf dieser Singulärwerte bzw. die dazu gehörige Kondition spielt im anschließenden Kapitel zur Vorstellung der Resultate die zentrale Rolle und gibt uns Auskunft darüber, wie gut sich infinitesimale Veränderungen der Stromdichteverteilung in den untersuchten MEAs im äußeren Magnetfeld bemerkbar machen, d.h. mit welcher Genauigkeit mittels Magnetotomographie die Stromdichteverteilung der jeweiligen MEAs rekonstruiert werden kann.

#### 4.2.4 Entwicklungskoeffizienten von Strömen durch die MEA

Im Abschnitt (3.4) war bereits darauf hingewiesen, dass die etwas unanschaulichen Vektoren  $d\alpha$  ersetzt werden sollten durch die Entwicklungskoeffizienten  $d\beta$  einer auf der MEA-Fläche definierten orthonormalen Basis  $\{q_{ni}\}$ . Das wird jetzt explizit durchgeführt. Da die  $dj_n$  immer auf Teilflächen  $A_l$ , die auf der MEA liegen, konstant sind, kann die Orthonormalitätsbedingung Gl.(3.14) für die  $q_{ni}$  ersetzt werden durch die Bedingung

$$\begin{aligned} Q_{i,l} &= \sqrt{A_l} \cdot q_{ni,l} \\ Q_i \cdot Q_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sei  $\mathcal{U}_w$  die Matrix, die mit Hilfe der  $d\alpha$  die Stromdichteabweichungen  $dj_n$  auf der MEA bestimmt:

$$dj_n = \mathcal{U}_w d\alpha \tag{4.5}$$

und es sei analog zu den  $Q_i$

$$dJ_{i,l} = dj_{ni,l} \cdot \sqrt{A_l} \tag{4.6}$$

so dass man den Zusammenhang erhält

$$\begin{aligned} dJ &= \mathcal{A}_w \mathcal{U}_w d\alpha \\ A_{wlk} &= \delta_{lk} \sqrt{A_l} \end{aligned} \tag{4.7}$$

und daraus die Beziehung<sup>2</sup>

$$dJ = \mathcal{A}_w \mathcal{U}_w d\alpha = Q d\beta \tag{4.8}$$

Die Matrix  $Q$  enthält die  $Q_i$  als Spaltenvektoren. Führt man nun eine  $\mathcal{QR}$  Zerlegung durch(, wobei  $\mathcal{Q}$  orthogonal und  $\mathcal{R}$  eine quadratische obere Dreiecksmatrix ist), dann erhält man jetzt einen expliziten Ausdruck für  $\mathcal{R}$  (vgl. Gl.(3.16))

$$\begin{aligned} \mathcal{QR} &= \mathcal{A}_w \mathcal{U}_w \\ d\beta' = \mathcal{Q}^T Q d\beta &= \mathcal{R} d\alpha \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Matrix  $\mathcal{Q}^T Q$  ist unitär, ändert also die Singulärwerte von  $\mathcal{S}_O$  nicht und es ist  $|d\beta| = |d\beta'|$ . Darum kann in unseren Betrachtungen - vgl. Gl.(3.33) - so getan werden, als sei  $\mathcal{Q}^T Q$  die Einheitsmatrix. Somit erhält man nun die Matrix  $\mathcal{S}_O$ , vgl. Gl.(3.17). Damit ist

---

<sup>2</sup>Was man haben möchte, sind die Koeffizienten  $d\beta$  in Gl.(3.15). Ersetzt man die Integrationen durch Summen, dann bekommt man die Entwicklungskoeffizienten  $d\beta$  korrekt, wenn man die Definitionen Gl.(4.4) und Gl.(4.6) einführt.

der Übergang von den  $d\alpha$  zu den anschaulicheren Koeffizienten  $d\beta$  einer auf der MEA definierten Basis  $\{q_{ni}\}$  vollzogen.

Im Programm führt die Routine `orthomea()` die  $\mathcal{QR}$ -Zerlegung durch. Mit einer neuen Singulärwertzerlegung von  $S_O$  werden abschließend die Singulärwerte in `swh` aktualisiert.

#### 4.2.5 Reduktion der Messpunkte mit der $\zeta$ -Funktion

Wie bereits im Anfang des Kapitels erwähnt wurde, gibt es die Möglichkeit eine Messpunkt-reduktion mit Hilfe der in 3.5 beschriebenen  $\zeta$ -Funktion durchzuführen. Somit werden in dieser Funktion `get_z()` jedem Magnetfeldmesspunkt mit

$$\zeta(r_j) := \frac{N_H}{\eta} \sum_{i=0}^2 (\mathcal{U}\mathcal{U}^T)_{3j+i, 3j+i}$$

eine Gewichtung zugeordnet. Der Programmcode dazu sieht folgendermaßen aus:

```
zeta = sum(Uh.^2')';
zeta = nh/nc * sum(reshape(zeta',nh,3)')';
```

Der erste Befehl generiert die Matrix  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{U}\mathcal{U}^T$  wobei die nächste Anweisung anschließend nach der Summenbildung aller drei Komponenten eines jeden Magnetfeldvektors die  $\zeta$ -Funktion berechnet. Alle Messpunkte, die die vordefinierte Schranke  $d_\zeta$  unterschreiten, werden vernachlässigt, sodass im Anschluss eine neue Singulärwertzerlegung der reduzierten Matrix `dhr` durchgeführt und auf `swhr` festgehalten wird. Für die Diskussion der Resultate im vorletzten Kapitel spielt die  $\zeta$ -Funktion eine besondere Rolle.

# Kapitel 5

## Resultate

In diesem Kapitel werden nun die ermittelten Resultate vorgestellt und die Grenzen der Magnetotomographie bei Brennstoffzellenstacks aufgezeigt. Um genauere Aussagen treffen zu können, wurden zunächst unterschiedliche Modelle für Brennstoffzellenstacks festgelegt und insbesondere in Bezug auf die Gittereinteilung in Querschnittsrichtung des Stacks. Außerdem wurde der Abstand der Magnetfeldmesspunkte variiert. Es wurde auch der Frage auf den Grund gegangen, unter welchen Voraussetzungen Defekte an verschiedenen MEAs eines Stacks durch dieses Tomographieverfahren erfasst werden können. Diese Frage ist wichtig, denn damit kann die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen bestimmt werden. Verglichen wurde auch ein Stack ohne Aluminiumplatten und mit Aluminiumplatten, im Folgenden Grafitstack und Aluminiumstack genannt. Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, bietet der Einbau von einfachen Aluplatten bei der Detektierbarkeit von Defekten in einem Stack aufgrund unterschiedlicher konkurrierender Vorgänge keine eindeutigen Vorzüge.

### 5.1 Festlegung der Modellierung

Wie bereits im ersten Kapitel schon erwähnt, wurde für die Simulationsberechnung ein Experimentierbrennstoffzellenstack bestehend aus 51 Brennstoffzellen der Querschnittsfläche  $150\text{mm} \times 150\text{mm}$  gewählt. Eine Zelle hat dabei eine Dicke von  $3\text{mm}$ , sodass mit den äußeren Stahlplatten von jeweils  $5\text{mm}$  Dicke der Stack eine Länge von  $163\text{mm}$  erlangen würde. Durch das Einbauen von  $1\text{mm}$  dicken Aluminiumplatten zwischen jeder Zelle, wird die Gesamtlänge jedoch um  $50\text{mm}$  auf  $213\text{mm}$  erhöht. Damit nun die Fälle mit und ohne Aluminiumplatten direkt miteinander verglichen werden können, gilt es, die Längen der beiden Stacks zu vereinheitlichen, indem man den Stack ohne Aluminiumplatten mit zusätzlichen  $1\text{mm}$  dicken Grafitplatten zwischen jeder Zelle verbaut. Folglich unterscheiden sich der Aluminiumstack und Grafitstack nur in ihren Leitfähigkeiten in den Schichten, die zwischen jede Zelle angebracht wurden, und nicht in ihrer Geometrie, d.h. die Länge beträgt immer  $213\text{ mm}$ . Auch bei weiteren Diskretisierungen bzw. Gittergenerierungen

werden die beiden Fälle mit Aluminium und ohne Aluminium immer einheitlich gehalten, um die Unterschiede bei den Ergebnissen direkt auf die Materialeigenschaften zurückführen zu können.

Für eine realitätsnahe Simulation ist es bei der Festlegung der Modellierung wichtig, die Diskretisierung in der unmittelbaren Umgebung der untersuchten MEAs fein genug zu wählen. Im Abschnitt 4.1 wurde bereits das Zusammenfassen von mehreren Schichten innerhalb eines Stacks zu einem homogenisierten Block zur Minimierung des Rechenaufwandes angesprochen. Es werden also die Schichten, die weiter entfernt von den untersuchten MEAs liegen, mit einer gemittelten Leitfähigkeit zusammengefasst und mit einem größerem Gitter versehen. Wie dies im Detail aussieht, wird im Folgenden erläutert. Zur Vereinfachung werden nun die MEAs ausgehend von der mittleren MEA des Brennstoffzellenstacks numeriert, sodass diese mittlere MEA die Bezeichnung  $M_0$  erhält. Die MEA der ersten Nachbarzelle links von  $M_0$  heißt somit  $M_{-1}$  und rechts  $M_1$ . Folglich sind die 51 MEAs des Modellstacks mit  $M_{-25}, \dots, M_0, \dots, M_{25}$  bezeichnet. Bei den Berechnungen wurden die untersuchten MEAs symmetrisch mit unterschiedlichen Abständen angeordnet, sodass immer die MEAs  $M_{-i}$  und  $M_i$ ,  $0 \leq i \leq 25$  markiert sind.

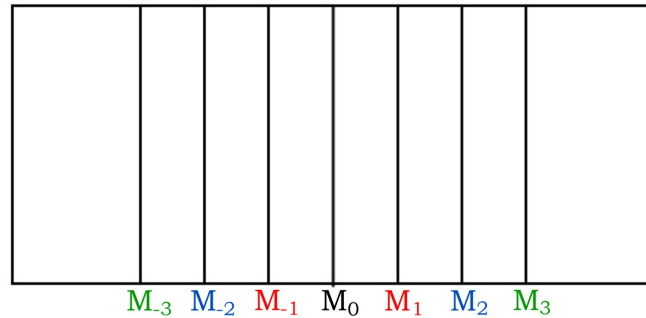


Abbildung 5.1: Bezeichnung der MEAs bei einem Beispielstack mit 7 Brennstoffzellen.

Für den Fall, dass nur die mittlere MEA  $M_0$  auf Perturbationen in ihrer Leitfähigkeit untersucht wird, sind die Zellen links und rechts von  $M_0$  ausmodelliert und die restlichen Bereiche zu einheitlichen Blöcken zusammengefasst. Für die Untersuchung der MEAs  $M_{-1}$  und  $M_1$  wurden in der Mitte des Stacks somit 5 Zellen ( $M_{-2}, \dots, M_2$ ) ausmodelliert. Da sich bei der Betrachtung der MEAs  $M_{-2}$  und  $M_2$  zwischen diesen MEAs nur 3 Zellen befinden, wurden in diesem Fall nur die Bereiche  $M_i$ ,  $|i| > 3$  zu homogenen Blöcken zusammengefasst. Ab den Markierungen für  $M_i$ ,  $|i| \geq 3$  wurde zusätzlich zu den Bereichen für  $M_{|i+1|}$ ,  $i = 3, \dots, 24$  noch der Bereich in der Mitte zwischen  $M_{-i+1}$  und  $M_{i-1}$  homogenisiert. Dies ist gerechtfertigt, da Testrechnungen mit jeweils zwei ausmodellierten Zellen links und rechts der untersuchten Zelle  $M_i$  nur geringfügige Abweichungen ergaben. Die Simulationsberechnungen wurden mit entkoppeltem Parametergitter (4.2.2.1) durchgeführt. Um präzise Aussagen darüber treffen zu können, mit welcher Auflösung eine

Rekonstruktion der Stromdichten innerhalb der untersuchten MEAs möglich ist, wurde für das Parametergitter zwischen unterschiedlichen Gitterauflösungen von  $3 \times 3$  ( $5\text{cm} \times 5\text{cm}$ ),  $4 \times 4$  ( $3.75\text{cm} \times 3.75\text{cm}$ ) und  $5 \times 5$  ( $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ ) variiert. Das Berechnungsgitter wurde bei den Parametergittern von  $3 \times 3$  und  $5 \times 5$  auf  $15 \times 15$  und bei  $4 \times 4$  auf  $12 \times 12$  festgelegt. Die Anordnung der Magnetfeldmesspunkte wurde für alle Berechnungen so gewählt, dass sie exakt über jeder MEA positioniert sind und den gesamten Stack umfassen. Folglich beträgt in Längsrichtung des Stacks (y-Richtung) der Abstand der Messpunkte untereinander  $4\text{mm}$ . In Querschnittsrichtung (x- und z-Richtung) sind die Messpunkte voneinander jeweils  $1\text{cm}$  entfernt. Für die Berechnungen der im Folgenden vorgestellten Resultate wurde jeweils ein Messabstand<sup>1</sup> zum Stack von  $1\text{cm}$  und  $3\text{cm}$  gewählt<sup>2</sup>. Zur Umsetzung in der Realität ist der Messabstand von  $1\text{cm}$  wohl zu klein, jedoch ist die Diskussion dieses Falles von besonderer Bedeutung, um eine Aussage über den optimalen Fall der Magnetotomographie bei Brennstoffzellenstacks treffen zu können. Der Messabstand von  $3\text{cm}$  hingegen ist durchaus realisierbar.

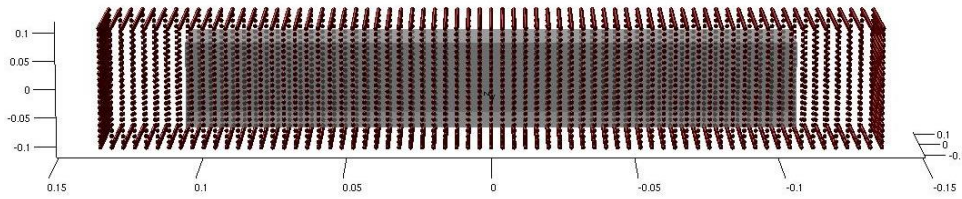


Abbildung 5.2: Anordnung der Magnetfeldmesspunkte bei einem Messabstand von  $1\text{cm}$ . Für eine übersichtliche Darstellung wurde der Stack in Längsrichtung mit dem Faktor 5 skaliert.

Zuletzt sei noch erwähnt, dass für die Berechnungen die Stromeinleitung und Stromausleitung flächig auf den Stahlplatten am Rand mit einer Stromdichte von  $2000 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$  vorgenommen wird (Neumann-Randbedingung), sodass bei Fehlen einer Störung nur in Längsrichtung des Stacks (y-Richtung) ein Strom  $\neq 0$  herrscht.

## 5.2 DMFC-Stack ohne Aluminiumplatten

Als erstes werden die Ergebnisse für den Stack mit den zusätzlichen Grafitplatten vorgestellt. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf folgendes Problem: Alle Zellen im Stack sind in Ordnung, bis auf eine, weit von den Stackenden befindliche, die gestört sein kann, wobei die Position dieser einen Zelle bekannt ist. Wir tun das deshalb, weil dies

<sup>1</sup>Es muss betont werden, dass in dieser Arbeit unter Messabstand der Abstand der Messpunkte von den aktiven Teilen der MEAs im Stack zu verstehen ist *und nicht* der Abstand vom Stack mit allen seinen Hilfsanschlüssen und -Geräten.

<sup>2</sup>Der genaue Messabstand beträgt aus geometrischen Gründen  $0.95\text{cm}$  bzw.  $2.95$ , da sonst die Messpunkte nicht direkt über den MEAs angeordnet werden.

vom Standpunkt der Diagnose der günstigste Fall für Magnetotomographie im Stack ist und sich bereits hier die Grenzen der konventionellen Magnetotomographie für den Stack zeigen werden, es also weniger sinnvoll erscheint, auf ungünstigere Situationen überzugehen. Was interessiert, ist, wie genau die Stromdichteverteilung der gezielt untersuchten MEA rekonstruiert werden kann, d.h. wie akzeptabel Genauigkeitsanforderungen an die Messgeräte sind. Dazu werden gebraucht: Die Kondition  $\kappa$ , der kleinste Singulärwert (vgl. Gl.(3.38)) sowie die Zahl  $m^*$ , die die Anzahl korrelierter Zellen angibt, (vgl. Gl.(3.13))<sup>3</sup>. Bei der Bestimmung von  $m^*$  geht es um die Frage, ab welchen Abständen zweier defekter Zellen sich deren gestörte Magnetfelder den entsprechenden MEAs zuordnen lassen. Dabei muss sich auswirken, dass Veränderungen der Leitfähigkeit innerhalb einer MEA sich bis zur 7. Nachbarzelle bemerkbar machen können.

### 5.2.1 Messabstand von $1cm$

Die im Folgenden aufgelistete Tabelle enthält nun die Resultate für die Berechnungen mit einem Messabstand von  $1cm$  und einem  $3 \times 3$  Parametergitter. Die erste Spalte veranschaulicht, welche MEAs auf Variationen in ihrer Leitfähigkeit untersucht wurden, die zweite zeigt das Parametergitter, die dritte Spalte den maximalen Singulärwert, die vorletzte Spalte den kleinsten Singulärwert und die letzte Spalte die Relation vom größten Singulärwert zum kleinsten Singulärwert, also die Kondition  $\kappa$ .

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$3 \times 3$	0.4738	0.0047	101.0294
-1 1	$3 \times 3$	0.6249	0.0020	317.0624
-2 2	$3 \times 3$	0.6534	0.0034	190.7734
-4 4	$3 \times 3$	0.5175	0.0044	117.9560
-6 6	$3 \times 3$	0.4920	0.0046	106.3544
-8 8	$3 \times 3$	0.4781	0.0046	102.9443
-10 10	$3 \times 3$	0.4742	0.0046	101.6491

Tabelle 5.1: Grafitstack mit  $3 \times 3$  Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von  $1cm$  (Legende im Anhang).  $m^* \approx 6$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.9).

Wie in Abschnitt 3.4 gezeigt wurde, sind Kondition  $\kappa$ , die Zahl  $m^*$ , die die Anzahl der korrelierten Zellen angibt, und der kleinste Singulärwert  $s_{min}$  zur Auswertung der ermittelten Ergebnisse wichtige Werte. Das Produkt  $m^*\kappa$  gibt Auskunft darüber, welche Anforderungen an Messgeräte bezüglich der Genauigkeit zu stellen sind, wenn man die Natur der Fehler nicht kennt - d.h. nicht weiß, ob es sich um zufällige oder systematische Fehler handelt, vgl. Gl.(3.25). Dagegen ist  $s_{min}$  proportional zur Größe des erlaubten absoluten zufälligen Fehlers, vgl. Gl.(3.38).

<sup>3</sup>In diesem Zusammenhang ist noch Folgendes zu beachten. In allen Tabellen dieses Abschnitts sind für die Genauigkeitsabschätzungen nur die  $\kappa$  und  $s_{min}$  Werte der ersten Zeile von Bedeutung. Die Werte in den anderen Zeilen dienen nur der Anschauung - und zur Bestimmung von  $m^*$ .



Ein Wert des Produkts  $m^*\kappa$  im Bereich von 500, welches einer absoluten Genauigkeitsanforderung von  $\approx 10^{-8}$  Tesla entspricht, wird dabei als noch akzeptabel erachtet. Wenn man sicher ist, dass die Fehler zufälliger Natur sind, ist in diesen Rechnungen alternativ  $s_{min} = 5 \cdot 10^{-4}$  noch möglich<sup>4</sup>.  $m^*\kappa$  befindet sich demnach für den vorliegenden Fall bereits im Grenzbereich, so dass also eine Rekonstruktion der Stromdichten mit einer Auflösung von  $5\text{cm} \times 5\text{cm}$  kaum möglich ist. Die großen  $m^*$  Werte bedeuten, dass sich die aussagekräftigen Magnetfelder deutlich überlagern müssen.

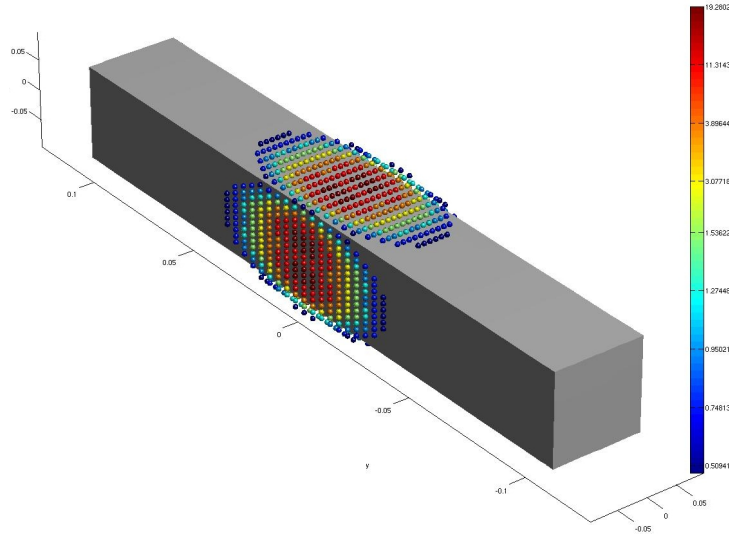


Abbildung 5.3: Reduzierte Messpunkte für  $d_\zeta = 0.5$  und einem Parametergitter von  $3 \times 3$ . MEA  $M_0$  wird untersucht.

Genau diese Überlagerung der aussagekräftigen Magnetfelder wird mit Hilfe der  $\zeta$ -Funktion veranschaulicht. Die oben aufgeführten Grafiken stellen die  $\zeta$ -Funktion mit den reduzierten Messpunkten für  $d_\zeta = 0.5$  dar. In der ersten Abbildung 5.3 wird die MEA  $M_0$  und in der zweiten 5.4  $M_{-1}$  und  $M_1$  untersucht. Wie auch aus den Abbildungen zu entnehmen ist, überlappen sich die relevanten Magnetfelder von  $M_{-1}$  und  $M_1$  so stark, dass dieser Fall kaum von dem Fall mit einer einzelnen untersuchten MEA  $M_0$  zu unterscheiden ist. Diese Tatsache führt insbesondere bei höheren Auflösungen des Parametergitters zu Problemen bei der Invertierung der Matrix  $\mathcal{S}$ , welche eine Veränderung der Leitfähigkeit der jeweiligen MEAs auf die Variation des diskreten Magnetfeldes abbildet. Somit ist es also problematisch, Perturbationen der Leitfähigkeit nah benachbarter MEAs zu detektieren. Da aber nun bekannt ist, dass die Untersuchung einer einzelnen Zelle weitaus bessere Ergebnisse liefert, muss ab einer ausreichenden Entfernung zweier untersuchter MEAs eine ähnlich niedrige Konditionszahl  $\kappa$  resultieren. Denn Magnetfelder fallen mit der Entfernung in ih-

<sup>4</sup>Dass beim zufälligen Fehler die Werte deutlich günstiger ausfallen, liegt auch daran, dass diesen Rechnungen 4000 Messpunkte, also eine sehr hohe Anzahl, zu Grunde gelegt werden. Und wie bei allen Rechnungen mit zufälligen Fehlern geht auch hier die Wurzel aus der Messpunktanzahl in die Genauigkeitsanforderung ein.

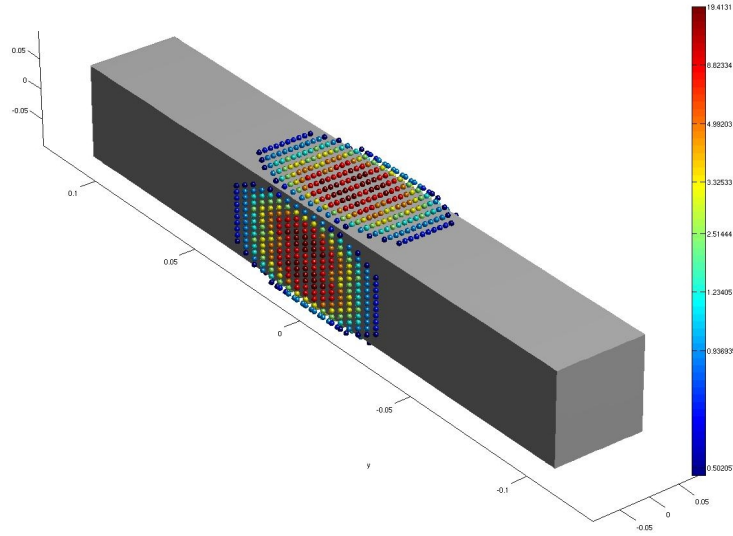


Abbildung 5.4: Reduzierte Messpunkte für  $d_\zeta = 0.5$  und einem Parametergitter von  $3 \times 3$ . MEAs  $M_{-1}$  und  $M_1$  werden untersucht.

rer Intensität ab, sodass die Überlappung bei Erhöhung des Abstandes von  $M_{-i}$  und  $M_i$  immer geringer werden muss. Auch dieser Effekt ist aus der Tabelle 5.1 zu entnehmen, sodass schon bei der Untersuchung von  $M_{-10}$  und  $M_{10}$  die Konditionszahl  $\kappa_{10,10}$  nur noch um etwa 0.6% von der Kondition  $\kappa_0$  des Falles mit  $M_0$  abweicht. Die folgende Abbildung 5.5

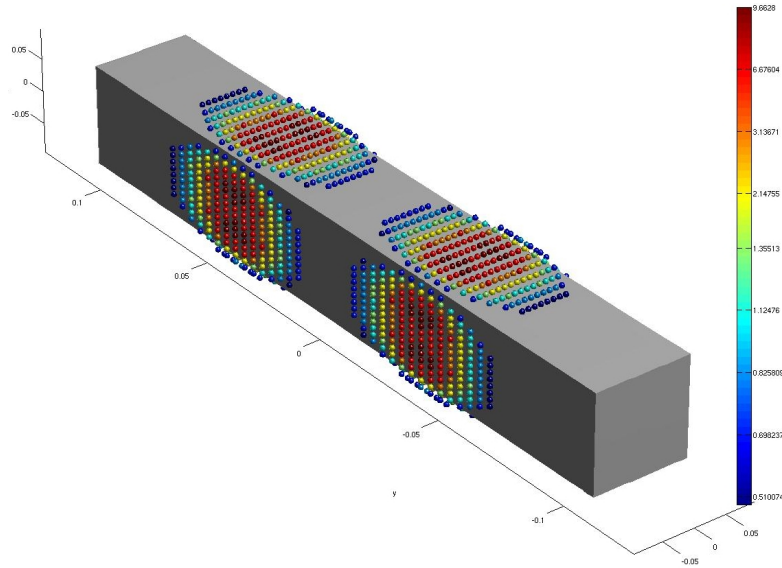


Abbildung 5.5: Reduzierte Messpunkte für  $d_\zeta = 0.5$  und einem Parametergitter von  $3 \times 3$ . MEAs  $M_{-10}$  und  $M_{10}$  werden untersucht.

bestätigt diese Überlegung ebenfalls, bei der erneut die Messpunktreduktion mit  $d_\zeta = 0.5$  für die Untersuchung der MEAs  $M_{-10}$  und  $M_{10}$  angewandt wurde. Die geringe Abweichung der Konditionszahlen  $\kappa_0$  und  $\kappa_{-10,10}$  bestätigen somit, dass die sich überlappenden

Magnetfeldbereiche nur eine relativ geringe Stärke von weniger als 0.51, im Gegensatz zum maximalen Wert von etwa 9.66 aufweisen.

Die Frage ist nun, wie sich der Verlauf der Konditionen  $\kappa$  verändert, wenn das Parametergitter auf  $5 \times 5$  erhöht und somit die Auflösung auf  $3\text{cm} \times 3\text{cm}$  verfeinert wird. Die Berechnungen dazu haben ergeben, dass schon bei einer einzelnen untersuchten Zelle die Werte  $m^*\kappa = 4.5 \cdot 10^4$  und  $s_{\min} = 7.5 \cdot 10^{-5}$  erreicht werden. Deswegen werden diese Fälle im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr aufgeführt.

Schaut man sich nun in der folgenden Tabelle die Berechnungen von einem größeren Parametergitter von  $4 \times 4$  an, welche die analogen Fälle von 5.1 beinhaltet,

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$4 \times 4$	0.5104	0.0018	276.1637
-1 1	$4 \times 4$	0.6634	$8.0389 \cdot 10^{-4}$	825.2389
-2 2	$4 \times 4$	0.7053	0.0014	515.7353
-4 4	$4 \times 4$	0.5620	0.0017	324.6122
-6 6	$4 \times 4$	0.5328	0.0018	292.9627
-8 8	$4 \times 4$	0.5165	0.0018	281.6636
-10 10	$4 \times 4$	0.5109	0.0018	277.8121

Tabelle 5.2: Grafitstack mit  $4 \times 4$  Parametergitter ( $3.75\text{cm} \times 3.75\text{cm}$ ) mit einem Messabstand von  $1\text{cm}$  (Legende im Anhang).  $m^* \approx 6$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.11).

so fällt direkt ins Auge, dass sich im Vergleich zu den Werten der Tabelle 5.1 die Kondition  $\kappa$  im allgemeinen verschlechtert hat. Mit dieser feineren Auflösung für die Untersuchung der MEA  $M_0$  ist für die Messgeräte eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im  $5 \cdot 10^{-8}$  Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern verknüpft.

### 5.2.2 Messabstand von 3cm

Beim Übergang auf einen Messabstand von 3cm, welches den realistischen Fall darstellt, ist zu erwarten, dass sich die Ergebnisse im Vergleich zu den Werten mit 1cm Messabstand verschlechtern. Man betrachte nun als erstes wieder den Fall, mit einem Parametergitter von  $3 \times 3$ .

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$3 \times 3$	0.2326	$7.2056 \cdot 10^{-4}$	322.8680
-1 1	$3 \times 3$	0.3127	$1.6265 \cdot 10^{-4}$	$1.9226 \cdot 10^3$
-2 2	$3 \times 3$	0.3431	$3.1843 \cdot 10^{-4}$	$1.0775 \cdot 10^3$
-4 4	$3 \times 3$	0.2959	$5.3099 \cdot 10^{-4}$	557.2289
-6 6	$3 \times 3$	0.2820	$6.4959 \cdot 10^{-4}$	434.0662
-8 8	$3 \times 3$	0.2655	$6.9717 \cdot 10^{-4}$	380.7698
-10 10	$3 \times 3$	0.2529	$7.1236 \cdot 10^{-4}$	355.0636

Tabelle 5.3: Grafitstack mit  $3 \times 3$  Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von 3cm (Legende im Anhang).  $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.10).

Durch den größeren Messabstand geben die Magnetfeldvariationen nun weniger Aufschluss über die Stromdichteänderungen innerhalb der untersuchten MEAs, sodass  $m^*$ ,  $\kappa$  und  $s_{min}$  erheblich ungünstiger ausfallen. Man erhält eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im  $10^{-8}$ Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern - und das, obwohl die Auflösung doch gering ist.

Wird nun die Auflösung des Parametergitters von  $5cm \times 5cm$  auf  $3.75cm \times 3.75cm$  verfeinert, so ergibt sich die folgende Tabelle.

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$4 \times 4$	0.2525	$2.0429 \cdot 10^{-4}$	$1.2360 \cdot 10^3$
-1 1	$4 \times 4$	0.3339	$5.0887 \cdot 10^{-5}$	$6.5624 \cdot 10^3$
-2 2	$4 \times 4$	0.3719	$9.6590 \cdot 10^{-5}$	$3.8507 \cdot 10^3$
-4 4	$4 \times 4$	0.3229	$1.5692 \cdot 10^{-4}$	$2.0581 \cdot 10^3$
-6 6	$4 \times 4$	0.3077	$1.8690 \cdot 10^{-4}$	$1.6462 \cdot 10^3$
-8 8	$4 \times 4$	0.2891	$1.9666 \cdot 10^{-4}$	$1.4699 \cdot 10^3$
-10 10	$4 \times 4$	0.2752	$1.9957 \cdot 10^{-4}$	$1.3792 \cdot 10^3$

Tabelle 5.4: Grafitstack mit  $4 \times 4$  Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von 3cm (Legende im Anhang).  $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.12).

Hier fallen die Werte nochmals ungünstiger aus mit der Folge, dass an die Messgeräte eine absolute Genauigkeitsanforderung unterhalb des nano-Tesla Bereichs bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern gestellt werden muß.

## 5.3 DMFC-Stack mit Aluminiumplatten

Bei der Vorstellung der Ergebnisse des Aluminiumstacks wird sich nun herausstellen, inwieweit eine Verbesserung der dazugehörigen Konditionen erzielt werden konnte<sup>5</sup>. In der Einleitung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Aluminiumplatten die Ausdehnung von Anomalien in der Stromdichte der MEA einer Brennstoffzelle zu den Nachbarzellen verhindern, da die Platten durch die extrem hohe Leitfähigkeit von  $37 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$  die Ströme schlagartig ausgleichen. Somit erfolgt also eine totale Separation der Defekte, da eine andere Zelle von diesen nicht beeinflusst wird. Zur Erinnerung: bei zusätzlich eingebauten Grafitplatten bewirkt eine Veränderung der Leitfähigkeit innerhalb einer MEA die Ausdehnung dieser Inhomogenität bis zur 7. Nachbarzelle. Das Wegfallen dieser Fehlerausbreitung lässt nun von den Grafitfällen abweichende Konditionen erwarten.

### 5.3.1 Messabstand von 1cm

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse von den Berechnungen für einen Aluminiumstack mit einem Messabstand von 1cm, einem Berechnungsgitter von  $15 \times 15$  und einem Parametergitter von  $3 \times 3$ . Es werden die analogen Fälle zu denen im letzten Kapitel betrachtet. Auffallend bei diesen Resultaten ist, dass die Konditionen im Vergleich zu den

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$3 \times 3$	0.2811	0.0042	66.1902
-1 1	$3 \times 3$	0.3830	0.0020	195.5622
-2 2	$3 \times 3$	0.3530	0.0032	108.6261
-4 4	$3 \times 3$	0.3085	0.0041	74.8236
-6 6	$3 \times 3$	0.2904	0.0042	68.4618
-8 8	$3 \times 3$	0.2833	0.0042	66.7801
-10 10	$3 \times 3$	0.2819	0.0042	66.4045

Tabelle 5.5: Aluminiumstack mit  $3 \times 3$  Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von 1cm (Legende im Anhang).  $m^* \approx 5$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.9).

Fällen ohne Aluminiumplatten in der Tabelle 5.1 um etwa 35% niedrigere Werte aufweisen. Ausschlaggebend dafür ist der maximale Singulärwert von 0.2811, welcher fast um die Hälfte kleiner ist. Man erhält eine absolute Genauigkeitsanforderung im  $10^{-8}$ Tesla Bereich bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im  $10^{-7}$ Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern.

Die relevanten Magnetfeldmeßpunkte überlagern sich auch hier, wie die Abbildung 5.6 erneut veranschaulicht.

<sup>5</sup>Wie im vorigen Abschnitt ist Folgendes zu beachten. In allen Tabellen dieses Abschnitts sind für die Genauigkeitsabschätzungen nur die  $\kappa$  und  $s_{min}$  Werte der ersten Zeile von Bedeutung. Die Werte in den anderen Zeilen dienen nur der Anschauung - und zur Bestimmung von  $m^*$ .

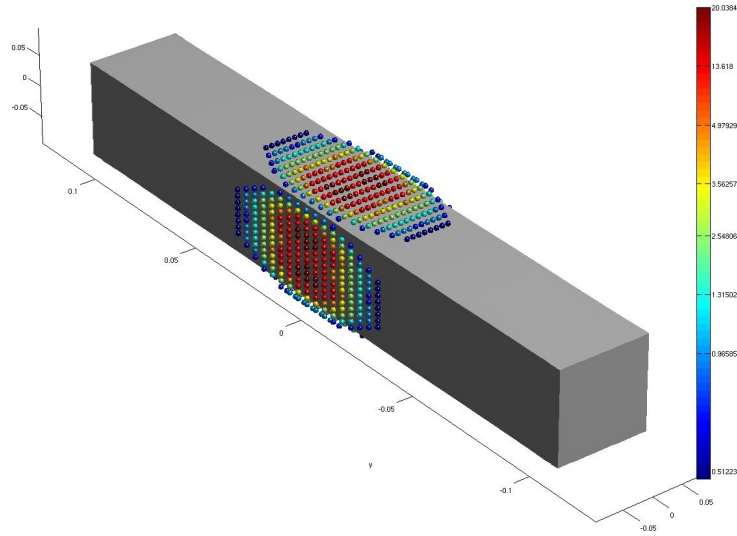


Abbildung 5.6: Reduzierte Messpunkte für  $d_\zeta = 0.5$  und einem Querschnittsgitter von  $3 \times 3$ . MEAs  $M_{-1}$  und  $M_1$  werden untersucht.

Schaut man sich nun die Ergebnisse bei einem feineren Querschnittsgitter von  $4 \times 4$  an, so erkennt man, dass auch hier die Konditionen um etwa 40% niedriger sind als die Grafit-

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$4 \times 4$	0.2855	0.0017	164.4865
-1 1	$4 \times 4$	0.3898	$7.8810 \cdot 10^{-4}$	494.5752
-2 2	$4 \times 4$	0.3601	0.0013	273.4130
-4 4	$4 \times 4$	0.3140	0.0017	187.0581
-6 6	$4 \times 4$	0.2950	0.0017	170.7296
-8 8	$4 \times 4$	0.2876	0.0017	165.8838
-10 10	$4 \times 4$	0.2864	0.0017	165.1127

Tabelle 5.6: Aluminiumstack mit  $4 \times 4$  Parametergitter ( $3.75\text{cm} \times 3.75\text{cm}$ ) mit einem Messabstand von  $1\text{cm}$  (Legende im Anhang).  $m^* \approx 5$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.11).

fälle mit der gleichen Auflösung 5.2. Man erhält eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im  $10^{-8}$ Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern.

### 5.3.2 Messabstand von $3\text{cm}$

Erhöht man nun den Messabstand auf  $3\text{cm}$ , so ist auch hier analog zu den Ergebnissen ohne Aluminiumplatten durch den höheren Messabstand eine allgemeine Verschlechterung von  $\kappa$ ,  $m^*$  und  $s_{\min}$  zu erwarten. Allerdings ist  $\kappa$  beim Graphitstack noch um die Hälfte größer, denn die maximalen Singulärwerte sind im Vergleich zu der Messung mit  $1\text{cm}$  Messabstand fast um die Hälfte geringer. Man erhält eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$3 \times 3$	0.1319	$6.3954 \cdot 10^{-4}$	206.2818
-1 1	$3 \times 3$	0.1854	$1.5187 \cdot 10^{-4}$	$1.2209 \cdot 10^3$
-2 2	$3 \times 3$	0.1822	$2.8948 \cdot 10^{-4}$	629.2903
-4 4	$3 \times 3$	0.1716	$4.8858 \cdot 10^{-4}$	351.3133
-6 6	$3 \times 3$	0.1600	$5.8740 \cdot 10^{-4}$	272.4274
-8 8	$3 \times 3$	0.1503	$6.2504 \cdot 10^{-4}$	240.4524
-10 10	$3 \times 3$	0.1432	$6.3653 \cdot 10^{-4}$	224.9931

Tabelle 5.7: Aluminiumstack mit  $3 \times 3$  Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von  $3cm$  (Legende im Anhang).  $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.10).

im  $10^{-8}$ Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern.

Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse für ein feineres Parametergitter von  $4 \times 4$  was einer Auflösung von  $3.75cm \times 3.75cm$  entspricht. Wieder ist analog zu den Ergebnissen ohne Aluminiumplatten durch den höheren Messabstand eine allgemeine Verschlechterung von  $\kappa$ ,  $m^*$  und  $s_{min}$  zu erkennen. Allerdings ist erneut  $\kappa$  beim Graphitstack noch um die Hälfte größer.

$i$ von $M_i$	P-Gitter	max SW	min SW	$\kappa$
0	$4 \times 4$	0.1349	$1.8606 \cdot 10^{-4}$	725.2269
-1 1	$4 \times 4$	0.1897	$4.6173 \cdot 10^{-5}$	$4.1076 \cdot 10^3$
-2 2	$4 \times 4$	0.1864	$8.7678 \cdot 10^{-5}$	$2.1255 \cdot 10^3$
-4 4	$4 \times 4$	0.1757	$1.4612 \cdot 10^{-4}$	$1.2022 \cdot 10^3$
-6 6	$4 \times 4$	0.1638	$1.7320 \cdot 10^{-4}$	945.6200
-8 8	$4 \times 4$	0.1538	$1.8243 \cdot 10^{-4}$	843.0139
-10 10	$4 \times 4$	0.1465	$1.8490 \cdot 10^{-4}$	792.4494

Tabelle 5.8: Aluminiumstack mit  $4 \times 4$  Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von  $3cm$  (Legende im Anhang).  $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.12).

Man erhält eine absolute Genauigkeitsanforderung unterhalb des nano-Tesla Bereichs bei systematischen Fehlern und eine absolute Genauigkeitsanforderung im nano-Tesla Bereich bei zufälligen Fehlern.

## 5.4 Vergleich beider Modelle

Wie bei der Vorstellung der Resultate für Brennstoffzellenstacks mit und ohne Aluminiumplatten zu erkennen war, bestehen einige Unterschiede in Bezug auf die Konditionen bzw. den minimalen und maximalen Singulärwerten. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Kondition bei eingebauten Aluminiumplatten für alle Querschnittsaufösungen und Messabstände etwa 35% niedriger ist. Wie bereits erwähnt, führen die Materialeigenschaften von Aluminium dazu, dass Perturbationen innerhalb einer Zelle keine weiteren Auswirkungen auf weitere Nachbarzellen haben, - im Gegensatz zu Grafitstacks. Um diese Tatsache zu verdeutlichen, dienen die beiden unten aufgeführten Grafiken 5.7 und 5.8, die die Ableitung der Stromdichte nach einer festen Leitfähigkeitskomponente  $\frac{dj}{d\sigma_k}$  innerhalb der Membran  $M_1$  mit jeweiligen Modellstacks beider Varianten veranschaulicht. Dabei wurden fünf Zellen in der Mitte ausmodelliert, und für eine übersichtliche Darstellung ein grobes Berechnungsgitter von  $5 \times 5$  gewählt.

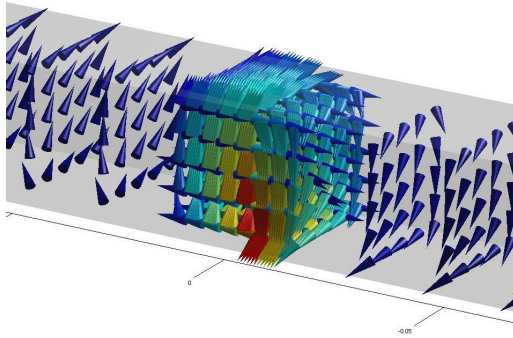


Abbildung 5.7: Ableitung der Stromdichte nach einer Leitfähigkeitskomponente in  $M_1$  ohne Aluminium

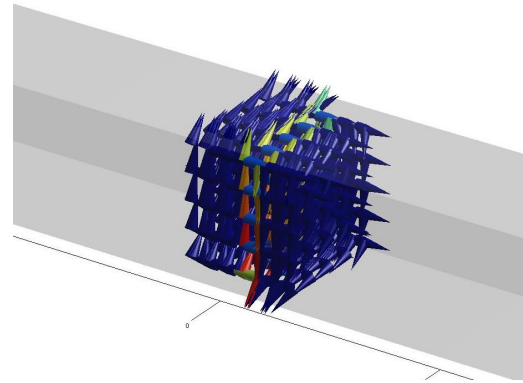


Abbildung 5.8: Ableitung der Stromdichte nach einer Leitfähigkeitskomponente in  $M_1$  mit Aluminium

Die Veränderung der Leitfähigkeitskomponente  $\sigma_k$  bewirkt für beide Fälle die größten Variationen in ihrer unmittelbaren Umgebung. Jedoch beschränken sich die Veränderungen der Stromdichte in der Abbildung 5.8 nur auf die direkt angrenzenden Aluminiumplatten von  $M_1$ . Alle Variationen, die sich außerhalb dieser Aluminiumschichten befinden, sind so klein, dass sie vernachlässigbar sind. Der maximale Wert von: Ableitung der Stromdichte nach der Leitfähigkeit, liegt dann bei fast  $7000 \frac{A}{mS}$ , während diese bei Abb.5.7 etwa an die  $1000 \frac{A}{mS}$  beträgt. Es herrschen also in den Aluminiumplatten weitaus höhere Ströme als es bei den Grafitplatten der Fall ist. Schaut man sich nun die Ausbreitung der Stromdichteveränderungen bei Abb.5.7 an, fällt direkt auf, dass diese sich über einen viel breiteren Bereich erstrecken. In allen fünf ausmodellierten Zellen existieren nicht vernachlässigbare Stromdichteveränderungen. Hier strahlen also die durch Störungen an einer MEA ausgelösten Stromdichteänderungen aus auf die MEA der benachbarten Zellen. Im Gegensatz dazu treten in einem Aluminiumstack weitaus stärkere Stromdichteveränderungen auf, die



dadurch zustande kommen, dass die Aluplatten alle Stromstörungen abfangen und von den benachbarten MEAs fernhalten. Die Fehlerausdehnung bei dem Grafitstack löst also Magnetfeldvariationen über einen größeren Bereich aus, sodass eine stärkere Magnetfeldänderung gemessen wird. Dies erklärt die höheren maximalen Singulärwerte im Vergleich zum Aluminiumstack. Diese Verstärkung der Magnetfeldvariation wirkt sich aber keineswegs positiv auf die dazugehörige Kondition aus, da eine größere Ausdehnung der Störströme eine Zuordnung der Störung zur entsprechenden MEA erschwert. Im Aluminiumstack hingegen befinden sich in den zur MEA, an der die Störung auftritt, benachbarten Aluminiumplatten besonders hohe Stromdichteänderungen, was bedeutet, dass hier relativ starke lokale Variationen im Magnetfeld verursacht werden. Wie bereits festgestellt wurde, ist ein Grund für das kleinere äußere Magnetfeld das Wegfallen der Fehlerausbreitung. Eine weitere Ursache wird aber klar, wenn man sich den Verlauf der Stromdichteänderungen in den Aluminiumplatten anschaut. Denn diese verlaufen in der einen Platte entgegengesetzt zu denen der anderen Platte, sodass die entstehenden äußeren Magnetfelder sich mit zunehmender Entfernung immer stärker gegenseitig schwächen, was bereits bei 1cm Abstand deutlich zu bemerken ist. Trotzdem resultiert bei einem Aluminiumstack eine bessere Kondition, da eine Zuordnung der Magnetfeldvariationen zu den Stromdichteveränderungen in den untersuchten MEAs genauer ist.

Nach den qualitativen Diskussionen gehen wir nun zu den quantitativen Ergebnissen über. Zunächst zeigt ein Vergleich von Abb.5.9 mit Abb.5.11 sowie von Abb.5.10 mit Abb.5.12, dass  $m^*$  eine allgemeinere Bedeutung zukommt, da die Ergebnisse nicht von der hier gewählten Auflösung abhängen.

Dagegen hängt  $m^*$  erwartungsgemäß davon ab, in welcher Entfernung gemessen wird. Dabei ist besonders unangenehm, wie groß  $m^*$  ist - auch bereits in 1cm Entfernung vom Stack, d.h.: unter günstigsten Bedingungen. Denn immerhin gibt  $m^*$  die praktische Auflösung an: Magnetfelder besser als mit der Auflösung  $m^*$  den Einzelzellen zuzuordnen, ist entweder eine Größenordnung schwieriger oder unmöglich.

Die nach der qualitativen Diskussion erwartete geringe Wirkung der Aluplatten in Bezug auf die Auflösung  $m^*$  wird ebenfalls bestätigt. Die Aluplatten sorgen für eine weitgehende Lokalisierung von Fehlern in der Stromverteilung. Auf die Auflösung der Magnetfelder hat dies leider den befürchteten geringen Einfluß. Denn auch wenn in einem Aluminiumstack die Variationen in Bezug auf die Stromdichten vollständig entkoppelt und unabhängig voneinander sind, ist dies für die resultierende Magnetfeldvariation nicht gültig, da Magnetfelder erst mit der Entfernung in ihrer Intensität abnehmen und sich somit überlagern.

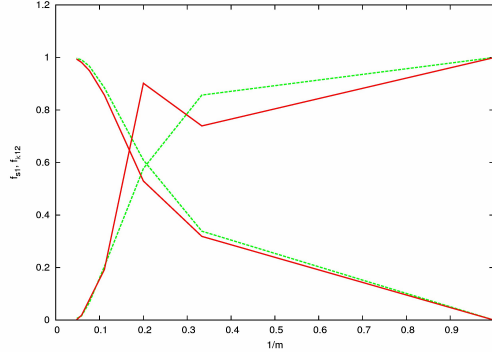


Abbildung 5.9: Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 1cm Messabstand und  $3 \times 3$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 6$  und für Aluminiumstack:  $m^* = 5$

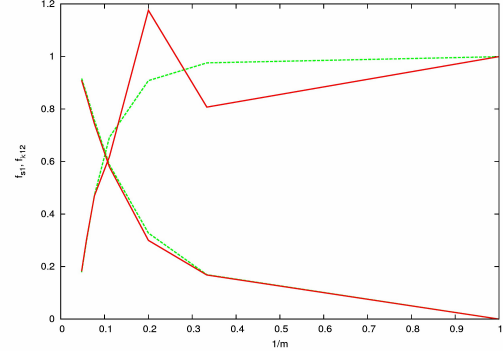


Abbildung 5.10: Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 3cm Messabstand und  $3 \times 3$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 9$  und für Aluminiumstack:  $m^* = 9$ .

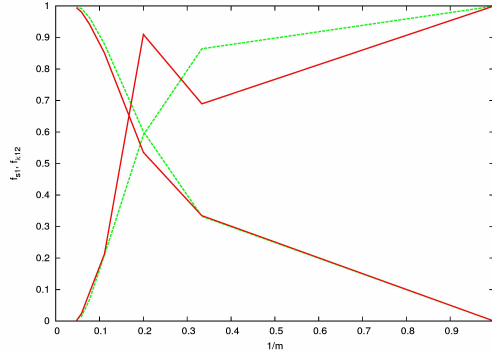


Abbildung 5.11: Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 1cm Messabstand und  $4 \times 4$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 6$  und für Aluminiumstack  $m^* = 5$ .

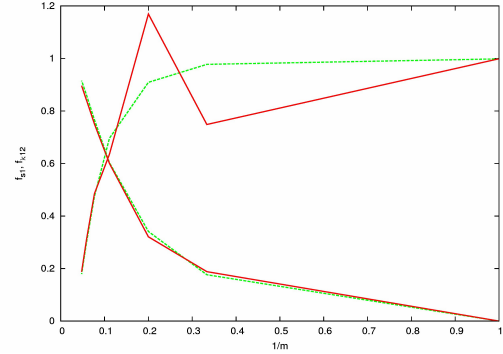


Abbildung 5.12: Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 3cm Messabstand und  $4 \times 4$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 9$  und für Aluminiumstack  $m^* = 9$ .

## 5.5 Simulation eines speziellen Defektes

Zur Veranschaulichung an einem Beispiel eines Aluminiumstacks wird nun die Stromdichteverteilung und das entstehende Magnetfeld bei einem eingebauten Defekt in der MEA  $M_0$  der Fläche  $5\text{cm} \times 5\text{cm}$  aufgezeigt. Die Stromeinleitung bzw. Stromausleitung wurde dabei punktuell in der Mitte der äußeren Stahlplatten angebracht. Da sich der eingeleitete Strom sehr schnell auf die gesamte Querschnittsfläche verteilt, hat diese Randbedingung keinen weiteren Einfluss auf die Berechnung von Veränderungen in der Stromdichte bzw. Variationen des Magnetfeldes. Im Folgenden ist nun die Stromdichteverteilung abgebildet.

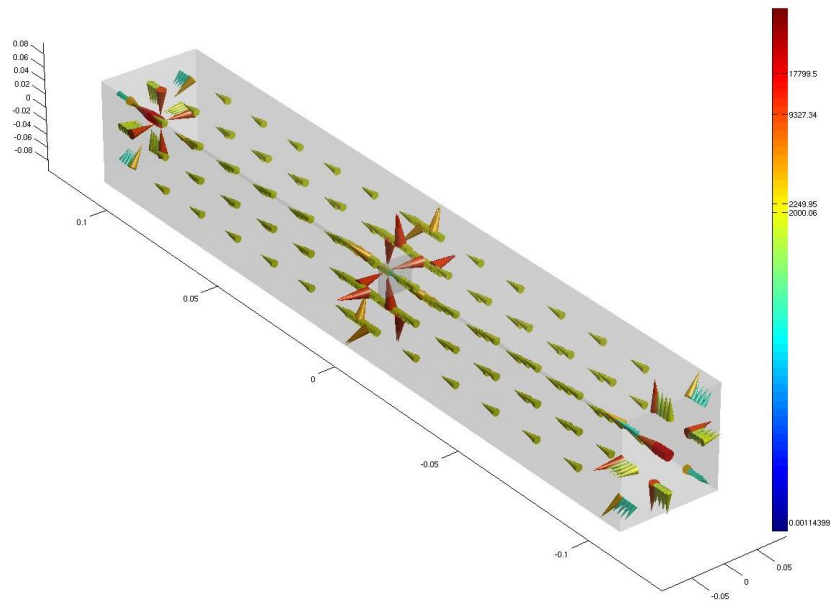


Abbildung 5.13: Stromdichteverlauf bei einem Aluminiumstack mit eingebautem Defekt ( $5\text{cm} \times 5\text{cm}$ ) in der Mitte von  $M_0$ . Das Querschnittsgitter hat durchgehend die Auflösung von  $5\text{cm} \times 5\text{cm}$ . Einheit  $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

Der punktuell eingeleitete Strom von  $45\text{A}$  verteilt sich schon innerhalb der äußeren Stahlplatte auf die gesamte Querschnittsfläche des Stacks, sodass sich eine gleichmäßige Stromdichteverteilung von  $2000 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$  einstellt. Auffällig ist, wie sich die Stromdichten in unmittelbarer Umgebung des Defektes verhalten. Sie weichen dem Defekt aus, sodass in den Aluminiumplatten direkt vor und nach dem Defekt durch die Ausgleichsströme hohe Stromdichten entstehen. Zu sehen ist auch, dass sich direkt nach der ersten Aluminiumplatte, die sich an die defekte Zelle anschließt, die Stromdichten auf den zuvor erwähnten einheitlichen Wert von  $2000 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$  einstellen.

Das Magnetfeld  $\vec{H}$  dazu ist in Abb.5.14 gezeigt. Man erkennt, dass durch die punktuelle Stromeinleitung auf den Stirnseiten starke Feldbeiträge entstehen. Das ebenfalls auffällige

Magnetfeld um den gesamten Stack entsteht durch den Stromfluss innerhalb des Stacks von  $2000 \frac{A}{m^2}$ . Da im Gegensatz zu dieser Stromdichte, die Stromdichteänderungen um die defekte Zelle verhältnismäßig gering sind, kann mit bloßem Auge keine Veränderung des Magnetfeldes durch den Defekt in der Grafik 5.14 erkannt werden - ein anschaulicher Hinweis darauf, wie empfindlich die Geräte sein müssen, die das Magnetfeld messen.

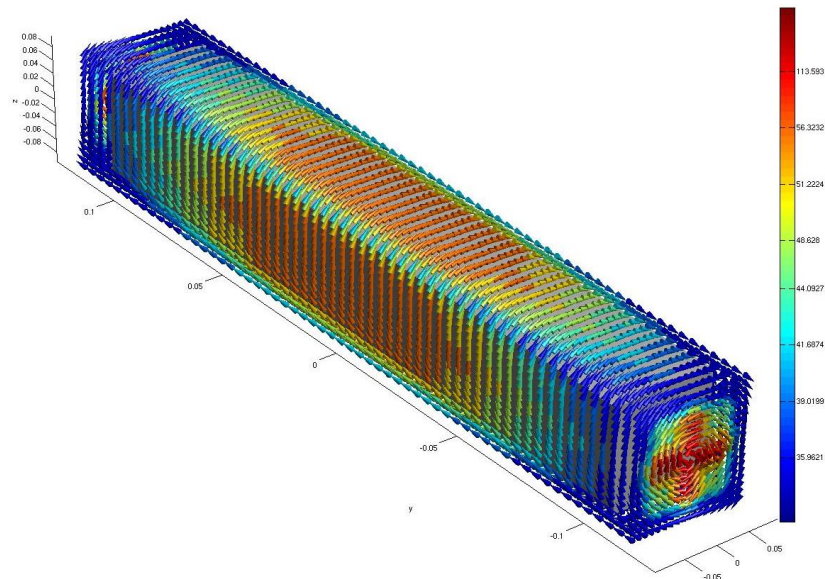


Abbildung 5.14: Magnetfeldstärke an den Messpunkten bei einem Aluminiumstack mit eingebautem Defekt ( $5cm \times 5cm$ ) in der Mitte von  $M_0$  und punktueller Stromein- und ausleitung in der Mitte der Stahlplatten. Das Querschnittsgitter hat die Auflösung von  $5cm \times 5cm$  und der Messabstand beträgt  $1cm$ . Einheit  $\frac{A}{m}$

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Es war von vornherein klar, dass Magnetotomographie am Brennstoffzellenstack sehr viel schwieriger sein würde als bei einer Brennstoffzelle, aus zwei Gründen. Grund I) ist offensichtlich: Im Stack überlagern sich die Magnetfelder von vielen Brennstoffzellen, und daraus die Ströme den einzelnen Brennstoffzellen richtig zuzuordnen, erscheint sehr schwierig. Grund II) ist weniger offensichtlich, ergab sich aber klar aus den Rechnungen an der Brennstoffzelle[2, 4, 5]: Die mit Abstand wichtigsten Messpunkte befinden sich auf den Stirnseiten der Brennstoffzelle. Gerade diese Messpunkte stehen aber für Zellen im Inneren des Stacks nicht zur Verfügung.

Die Auswirkungen von II) wurden zuerst untersucht und zwar an einer Zelle in der Mitte des Stacks. Fragestellung war, wie genau sich aus Änderungen des Magnetfeldes, gemessen über den Stack, Änderungen des Stromes durch die MEA dieser Zelle rekonstruieren lassen, *wenn alle anderen Zellen in Ordnung sind und die Nummer (bzw. Position) der zu untersuchenden Zelle bekannt ist*. Dies ist der am einfachsten zu diagnostizierende Fall, weil eine enorme Menge an Information vorausgesetzt wird. Denn mit der Phrase *eine Zelle ist in Ordnung* ist in diesem Zusammenhang gemeint, daß die Eigenschaften der MEA dieser Zelle *genau* bekannt sind.

Diese Anordnung hat den praktischen Vorteil, daß die Genauigkeitsanforderungen an die Meßgeräte für alle anderen Diagnoseaufgaben größer sein müssen als bei dieser Anordnung. Man bekommt also auf diese Weise die Mindestanforderungen, die Magnetfeldmeßgeräte auf jeden Fall erfüllen müssen, wenn Magnetotomographie am Stack betrieben werden soll.

Die Ergebnisse sind ernüchternd. Bei der Untersuchung eines Stacks, bestehend aus 51 Einzelzellen mit MEA Querschnittsfläche  $15\text{cm} \times 15\text{cm}$  würde die Auflösung einer  $5 \times 5$  Aufteilung schon bei einem Messabstand<sup>1</sup> von  $1\text{cm}$  eine Präzision der Messgeräte und Unterdrückung von Störmagnetfeldern erfordern, die technisch völlig unmöglich ist.

---

<sup>1</sup>Es soll hier noch einmal betont werden, dass unter Messabstand der Abstand der Messpunkte von den aktiven Teilen der MEAs im Stack zu verstehen ist *und nicht* der Abstand vom Stack mit allen seinen Hilfsanschlüssen und -Geräten.

Möglich ist eine Auflösung  $4 \times 4$ , wenn man Felder mit einer Genauigkeit im nano-Tesla Bereich messen und einen Meßabstand von  $1\text{cm}$  einhalten kann<sup>2</sup>. Kann man diesen Abstand nicht einhalten - was wahrscheinlich ist - und muß auf  $3\text{cm}$  Abstand ausweichen, dann ließe sich eine  $4 \times 4$  Auflösung nur mit Meßgeräten, deren Messfehler im sub-nano-Tesla Bereich liegt, verifizieren. Möglich ist eine Auflösung  $3 \times 3$ , wenn man Felder mit einer Genauigkeit im  $10^{-8}$ -Tesla Bereich messen und einen Meßabstand von  $1\text{cm}$  einhalten kann. Kann man diesen Abstand nicht einhalten - was wahrscheinlich ist - und muß auf  $3\text{cm}$  Abstand ausweichen, dann lässt sich eine  $3 \times 3$  Auflösung nur mit Meßgeräten, deren Messfehler im nano-Tesla Bereich liegt, verifizieren.

Etwas günstiger sieht es aus, wenn die Messfehler mit Sicherheit zufälligen Ursprungs sind. Dann ergeben unsere Rechnungen, daß die Anforderungen durchweg eine Größenordnung niedriger liegen. Allerdings haben wir hier 4000 Meßpunkte zu Grunde gelegt, nimmt man weniger, dann steigen die Anforderungen wieder gemäß dem Wurzelgesetz.

Es zeigte sich, daß Alubleche die Ausstrahlung eines Fehlers von einer MEA auf die nächste wirksam verhindern[6, 7], auf die Diagnose hatte dies jedoch praktisch keinen positiven Einfluss.

Die Auswirkungen von I) wurden untersucht anhand folgender Fragestellung: Wie gut lassen sich Änderungen des Magnetfeldes, gemessen über den Stack, den Änderungen von Strömen durch 2 Zellen im Stack zuordnen, wenn alle anderen Zellen intakt sind. Damit kann überprüft werden, inwieweit die Zellen Cluster bestehend aus  $m^*$  Zellen bilden, deren Magnetfelder so stark überlappen, daß sie einer bestimmten Zelle im Cluster nicht zugeordnet werden können. Es ist klar, dass bei großer Entfernung vom Stack  $m^*$  einfach die Anzahl der Zellen ist, in unserem Fall  $m^* = 51$ . Erstaunlich und unangenehm ist jedoch, daß bei  $3\text{cm}$  Messabstand  $m^*$  den Wert  $m^* = 9$  und selbst bei  $1\text{cm}$  Meßabstand  $m^*$  die Werte  $m^* = 5$  oder  $m^* = 6$  annimmt. Das bedeutet also, daß kaum zu unterscheiden ist, ob ein Störfeld von nur einer Zelle stammt oder aber kumulativ von  $m^*$  Zellen.  $m^*$  ist also ein Maß für die Auflösung - und die ist, wie unsere Rechnungen ergeben, völlig unbefriedigend. Auch hier schufen Alubleche keine signifikante Verbesserung.

## 6.1 Schlussfolgerung

Ganz offensichtlich stößt die konventionelle Magnetotomographie bei Verwendung als Diagnose für Stromdichteverhalten im Brennstoffzellen-Stack schnell an ihre Grenzen: Selbst bei Einhaltung optimalster Bedingungen (Magnetfeldmessgeräte höchster Präzision in  $1\text{ cm}$  Abstand vom stromdurchflossenen Teil des Stacks, Abschirmung aller Störfelder bis hin zum 10-Tausendstel des Erdmagnetfeldes) erhält man über die Stromdichte im Stack nur ein Muster von geringer Auflösung.

---

<sup>2</sup>Bei einer Einzelzelle wäre eine Auflösung von  $10 \times 10$  bei schwächeren Anforderungen durchaus erreichbar.

Folglich ist die konventionelle Methode der Magnetotomographie (Messung des Magnetfeldes auf einer den Stack einhüllenden Fläche) sowohl für das Erfassen von Stromdichtevariationen innerhalb einer bestimmten Zelle als auch für die Lokalisierung von mehreren Defekten nur sehr beschränkt einsetzbar, denn sie liefert bei sehr hohem Input an Aufwand nur sehr kümmerliche Ergebnisse. Es hat sich auch herausgestellt, dass die zusätzlichen Aluminiumplatten in Bezug auf die Magnetotomographie keine nennenswerte Verbesserung erbringen, allerdings den großen Vorteil haben, dass Anomalien der Stromdichte völlig lokal bleiben und nicht auf Nachbarzellen ausstrahlen. Darauf wird im letzten Abschnitt noch einmal eingegangen.

## 6.2 Ausblick

Um diesen Vorteil der totalen Entkopplung der Zellen auszunutzen ist die Idee, wie auch in [6, 7], die schlecht detektierbaren Ausgleichströme in den Aluminiumplatten durch das Anbringen von entgegengesetzten parallelen Schlitten an die Oberfläche des Aluminiumstacks zu zwingen. Denn die Schlitten sind so angeordnet, dass sie sich nicht durch die ganze Platte hindurch erstrecken, sondern pro Schlitz noch ein kleiner Steg vorhanden ist, wo diese Ausgleichsströme hindurch fließen. Dort sind sie durch gezielt angebrachte Magnetfeldmesspunkte gut zu detektieren. Denn allein diese Information über die Stegströme hat einen großen Stellenwert, da es damit möglich ist, unabhängig von der Magnetotomographie Aussagen über die Stromverteilung innerhalb einer MEA zu treffen. Es ist ein enormer Vorteil, dass an den Stegen verhältnismäßig sehr große Ströme herrschen, wodurch die Erfassung ihrer Magnetfelder unkritisch ist, sodass bei weitem keine scharfen Präzisionsanforderungen an die eingesetzten Messgeräte gestellt werden müssen. Denn diese liegen bei etwa  $25\mu T$ , was der Hälfte des Erdmagnetfeldes entspricht[7].

Die maximal erreichbare Auflösung hängt dabei von der Anzahl der angebrachten Schlitten innerhalb einer Aluminiumplatte ab. Die aktuellen Untersuchungen wurden mit jeweils zwei Schlitten pro Platte durchgeführt, sodass bei gleicher Querschnittsfläche von  $150mm \times 150mm$  eine Auflösung von  $5cm \times 5cm$  garantiert erreichbar ist. Bei einer Anzahl von vier Schlitten pro Platte hätte man schon eine Auflösung von  $3cm \times 3cm$  sicher erreicht. Die Frage ist es nun, wie lange eine Erhöhung der Schlitzanzahl sich positiv auf die Detektion von Defekten auswirkt, ohne dabei den natürlichen Verlauf der Ströme zu beeinflussen. Denn das beliebige Erhöhen der Schlitzanzahl würde zu Inhomogenitäten des Stromflusses führen.





# Anhang

## Legende der Tabellen

Kürzel	Beschreibung
$\kappa$	Kondition
$M_i$	untersuchte MEAs
min SW	kleinster Singulärwert
max SW	größter Singulärwert
P-Gitter	Parametergitter

Die zweite und alle folgenden Zeilen der Tabelle enthalten die Werte für zwei gestörte Zellen im Stack, zwischen denen  $2i - 1$  ungestörte Zellen liegen, während die erste Zeile von nur *einer* gestörten Zelle die Werte enthält, die zum Vergleich dienen sollen.

# Literaturverzeichnis

- [1] K.-H. Hauer, R. Potthast, T. Wüster, D. Stolten, 2005,  
„Magnetotomography - a new method for analysing fuel cell performance and quality“,  
J. Power Sources 143, pp. 67-74
- [2] H. Lustfeld, M. Reißel, U. Schmidt, B. Steffen, 2009,  
„Reconstruction of Electric Currents in a Fuel Cell by Magnetic Field Measurements“,  
J. Fuel Cell Sci. Technol. 6, p. 021012
- [3] H. Lustfeld, M. Reißel, U. Schmidt, B. Steffen  
Patent application PT 1.2354 und [2]
- [4] U. Schmidt, 2007,  
„Numerische Sensitivitätsanalyse für ein Tomographieproblem bei Brennstoffzellen“,  
Diplomarbeit, Fachhochschule Aachen, Standort Jülich
- [5] R. Telschow, 2008,  
„Untersuchungen zur Reduktion des Messaufwandes bei der Magnetotomographie von  
Brennstoffzellen“,  
Diplomarbeit, Fachhochschule Aachen, Standort Jülich
- [6] J. Hirschfeld, 2009,  
“Tomographic Problems in the Diagnostics of Fuel Cell Stacks”,  
(Diplomarbeit) Jül-Report Jül-4291 Forschungszentrum Jülich:  
<http://hdl.handle.net/2128/3588>
- [7] S. Both, 2009,  
„Methoden zur Verbesserung der Auflösung der Magnetotomographie von Brennstoff-  
zellenstacks“,  
(Diplomarbeit), Jül-Report Jül-4311 Forschungszentrum Jülich:  
[www.persistent-identifier.de/?link=610](http://www.persistent-identifier.de/?link=610) mit URN Nr.: urn:nbn:de:0001-00523
- [8] M. Reißel, 2005,  
„Numerische Mathematik I“, Vorlesungsskript
- [9] M. Reißel, 2006,  
„Numerische Mathematik III“, Vorlesungsskript

- [10] G. Lehner, 1994,  
„Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker“, Springer-Verlag
- [11] <http://www.wikipedia.org>
- [12] <http://www.fz-juelich.de>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau einer DMFC . . . . .	3
1.2	Beispielstack mit fünf aneinandergeschalteten Brennstoffzellen . . . . .	5
1.3	Grafiken vor und nach der Messpunktreduktion einer einzelnen DMFC mit $d_\zeta = 2$ . . . . .	8
1.4	Verlauf des Stromes bei einem Defekt innerhalb eines Brennstoffzellenstacks ohne Aluminiumplatten. Eingezeichnet sind Defekt einer Zelle und MEA der ersten Nachbarzelle. . . . .	10
1.5	Verlauf des Stromes bei einem Defekt innerhalb eines Brennstoffzellenstacks mit Aluminiumplatten. Eingezeichnet sind Defekt einer Zelle und MEA der ersten Nachbarzelle. . . . .	10
4.1	Modell eines Brennstoffzellenstacks mit 5 ausmodellierten Zellen und eingebauten Aluminiumplatten, Einheit $\frac{S}{m}$ . . . . .	32
4.2	Entkopplung des Parametergitters ( $3 \times 3$ ) vom Berechnungsgitter ( $9 \times 9$ ) . . . . .	36
5.1	Bezeichnung der MEAs bei einem Beispielstack mit 7 Brennstoffzellen. . . . .	43
5.2	Anordnung der Magnetfeldmesspunkte bei einem Messabstand von $1cm$ . Für eine übersichtliche Darstellung wurde der Stack in Längsrichtung mit dem Faktor 5 skaliert. . . . .	44
5.3	Reduzierte Messpunkte für $d_\zeta = 0.5$ und einem Parametergitter von $3 \times 3$ . MEA $M_0$ wird untersucht. . . . .	46
5.4	Reduzierte Messpunkte für $d_\zeta = 0.5$ und einem Parametergitter von $3 \times 3$ . MEAs $M_{-1}$ und $M_1$ werden untersucht. . . . .	47
5.5	Reduzierte Messpunkte für $d_\zeta = 0.5$ und einem Parametergitter von $3 \times 3$ . MEAs $M_{-10}$ und $M_{10}$ werden untersucht. . . . .	47
5.6	Reduzierte Messpunkte für $d_\zeta = 0.5$ und einem Querschnittsgitter von $3 \times 3$ . MEAs $M_{-1}$ und $M_1$ werden untersucht. . . . .	51
5.7	Ableitung der Stromdichte nach einer Leitfähigkeitskomponente in $M_1$ ohne Aluminium . . . . .	53
5.8	Ableitung der Stromdichte nach einer Leitfähigkeitskomponente in $M_1$ mit Aluminium . . . . .	53

- 5.9 Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 1cm Messabstand und  $3 \times 3$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 6$  und für Aluminiumstack:  $m^* = 5$  . . . . . 55
- 5.10 Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 3cm Messabstand und  $3 \times 3$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 9$  und für Aluminiumstack:  $m^* = 9$ . . . . . 55
- 5.11 Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 1cm Messabstand und  $4 \times 4$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 6$  und für Aluminiumstack  $m^* = 5$ . . . . . 55
- 5.12 Plot der Funktionen  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$ , aus denen sich nach Gl.(3.13) die Anzahl  $m^*$  der korrelierten Zellen ergibt. Ergebnisse für 3cm Messabstand und  $4 \times 4$  Parametergitter. Durchgezogene (rote) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Grafitstack, gestrichelte (grüne) Linie:  $f_{\kappa 12}$  und  $f_{s_1}$  für Aluminiumstack. Daraus ergibt sich für Grafitstack:  $m^* = 9$  und für Aluminiumstack  $m^* = 9$ . . . . . 55
- 5.13 Stromdichteverlauf bei einem Aluminiumstack mit eingebautem Defekt ( $5cm \times 5cm$ ) in der Mitte von  $M_0$ . Das Querschnittsgitter hat durchgehend die Auflösung von  $5cm \times 5cm$ . Einheit  $\frac{A}{m^2}$  . . . . . 56
- 5.14 Magnetfeldstärke an den Messpunkten bei einem Aluminiumstack mit eingebautem Defekt ( $5cm \times 5cm$ ) in der Mitte von  $M_0$  und punktueller Stromein- und ausleitung in der Mitte der Stahlplatten. Das Querschnittsgitter hat die Auflösung von  $5cm \times 5cm$  und der Messabstand beträgt 1cm. Einheit  $\frac{A}{m}$  . . 57

# Tabellenverzeichnis

5.1	Grafitstack mit $3 \times 3$ Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von $1cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 6$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.9). . . .	45
5.2	Grafitstack mit $4 \times 4$ Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von $1cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 6$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.11).	48
5.3	Grafitstack mit $3 \times 3$ Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von $3cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.10). . . .	49
5.4	Grafitstack mit $4 \times 4$ Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von $3cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.12).	49
5.5	Aluminiumstack mit $3 \times 3$ Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von $1cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 5$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.9).	50
5.6	Aluminiumstack mit $4 \times 4$ Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von $1cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 5$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.11). . . . .	51
5.7	Aluminiumstack mit $3 \times 3$ Parametergitter ( $5cm \times 5cm$ ) mit einem Messabstand von $3cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.10).	52
5.8	Aluminiumstack mit $4 \times 4$ Parametergitter ( $3.75cm \times 3.75cm$ ) mit einem Messabstand von $3cm$ (Legende im Anhang). $m^* \approx 9$ , (vgl. Gl.(3.13) und Abb.5.12). . . . .	52



# Danksagungen

Besonders möchte ich mich bei

Herrn Prof. Dr. rer. nat. M. Reißel für die Übernahme des Hauptreferats und

Herrn Dr. rer. nat. H. Lustfeld als Koreferent

sowie für deren fachliche Unterstützung bei der Arbeit bedanken.

Ein weiterer Dank gilt

Herrn J. Heinen,

Herrn J. Hirschfeld,

Herrn Dr. rer. nat. B. Steffen und

Frau U. Funk-Kath

sowie Frau S. Both für die gelungene Zusammenarbeit.



Jül-4310  
September 2009  
ISSN 0944-2952